PERBAIKAN ATURAN KUADRATUR NEWTON-COTES TERTUTUP

Dina Oktavieny[1*], **Bustami**[2]

[1]Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*oktavienydina@gmail.com

ABSTRACT

This paper discusses the improvement of closed Newton-Cotes quadrature rules. The idea is based on deriving weights of closed Newton-Cotes quadrature rules having the same length of intervals using degree of accuracy. By including the lower limit of the integral and the width of the interval as the two new additional variables, we obtain weights, the lower limit and the width of the interval used to form the improvement of closed Newton-Cotes quadrature rules. Computational tests using examples show that the accuracy of improvement formula is better than closed Newton-Cotes quadrature rules.

Keywords: *closed Newton-Cotes quadrature formulas, numerical integration methods, degree of accuracy*

ABSTRAK

Artikel ini membahas tentang perbaikan aturan kuadratur Newton-Cotes tertutup, yang beridekan pada penentuan bobot dari penurunan aturan kuadratur Newton-Cotes tertutup dengan lebar interval yang sama menggunakan derajat ketepatan. Dengan mengikutkan batas bawah integral dan lebar interval sebagai dua variabel tambahan diperoleh bobot baru, batas bawah dan lebar interval yang digunakan untuk membentuk formula perbaikan aturan kuadratur Newton-Cotes tertutup. Contoh komputasi yang dilakukan menunjukkan ketelitian formula perbaikan yang diperoleh lebih baik dari aturan kuadratur Newton-Cotes tertutup.

Kata kunci: *aturan kuadratur Newton-Cotes tertutup, integrasi numerik, derajat ketepatan*

1. PENDAHULUAN

Integrasi numerik merupakan suatu teknik numerik untuk mengaproksimasi nilai dari $\int_a^b f(x)dx$. Teknik numerik yang sering dilakukan adalah dengan mengaproksimasi $f(x)$ menggunakan polinomial interpolasi p_n [5, h.120], yaitu

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_n(x)dx. \tag{1}$$

Bila diberikan absis yang berbeda $x_0, x_1, ..., x_n$ pada $\in [a, b]$, formula integrasi numerik bertipe interpolasi dapat ditulis dalam bentuk

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i), \tag{2}$$

dengan w_i menyatakan bobot.

Ada dua cara [2, h. 74],[4, h. 79] untuk menghitung koefisien bobot w_i pada persamaan (2). Cara pertama adalah dengan menginterpolasikan $f(x)$ di $n+1$ titik $x_0, x_1, \cdots, x_n$ menggunakan polinomial Lagrange p_n, dan kemudian mengintegrasikan polinomial tersebut untuk memperoleh hasil dalam bentuk hubungan persamaan (2). Cara kedua adalah dengan memilih konstanta $w_0, w_1, \cdots, w_n$ sedemikian hingga *error*

$$E_n(f) = \int_a^b k(x)f(x)dx - \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i), \tag{3}$$

bernilai nol untuk semua $f(x) = x^j, j = 0, 1, \cdots n$. Kedua cara ini memperoleh hasil yang sama. Jadi, koefisien bobot $w_0, w_1, \cdots w_n$ adalah tunggal.

Pada artikel ini direview sebagian artikel Deghan [3] untuk mendapatkan formula integrasi berdasarkan polinomial interpolasi, yaitu perbaikan aturan kuadratur Newton-Cotes tertutup yang didasarkan pada penentuan bobot dari aturan kuadratur Newton-Cotes tertutup. Untuk itu, dibagian dua diberikan aturan kuadratur Newton-Cotes tertutup, kemudian dilanjutkan di bagian tiga tentang perbaikan aturan kuadratur Newton-Cotes dan di bagian empat dilakukan uji komputasi.

2. ATURAN KUADRATUR NEWTON-COTES TERTUTUP

Misalkan

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\frac{w(x)}{w'(x_i)(x - x_i)}, \qquad w(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_n), \tag{4}$$

adalah polinomial Lagrange yang menginterpolasikan $f(x)$ di $x_0, x_1, \cdots x_n$. Oleh karena itu formula integrasi pada persamaan (2) menjadi [1, h.109]

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{w'(x_i)} \int_a^b \frac{w(x)}{(x - x_i)}dx. \tag{5}$$

yang dikenal dengan formula integrasi Newton-Cotes. Bila interval $[a, b]$ dibagi menjadi n subinterval dengan panjang yang sama dengan titik-titik

$$x_i = a + ih, \qquad i = 0, 1, \cdots, n, \qquad h = \frac{b-a}{n},$$

maka persamaan ruas kanan (5) dapat dinyatakan dengan

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{w'(x_i)} \int_a^b \frac{w(x)}{(x-x_i)} dx = \frac{f(x_0)}{w'(x_0)} \int_a^b \frac{w(x)}{(x-x_0)} dx + \cdots + \frac{f(x_n)}{w'(x_n)} \int_a^b \frac{w(x)}{(x-x_n)} dx. \tag{6}$$

dengan $w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$. Jadi persamaan (6) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{w'(x_i)} \int_a^b \frac{w(x)}{(x-x_i)} dx \\ &\qquad = \frac{f(x_0)}{w'(x_0)} \int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(x-x_0)} dx \\ &\qquad\quad + \frac{f(x_1)}{w'(x_1)} \int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(x-x_1)} dx + \cdots \\ &\qquad\quad + \frac{f(x_n)}{w'(x_n)} \int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(x-x_n)} dx. \end{aligned} \tag{7}$$

Selanjutnya perhatikan suku ke-k pada persamaan (7) tanpa $f(x_k)$, yaitu

$$\begin{aligned} &\int_a^b \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_k)(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{w'(x_k)(x-x_k)} dx \\ &\qquad = \int_a^b \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} dx. \end{aligned} \tag{8}$$

Bila dilakukan transformasi $x = a + th$ dan karena $w'(x_k) = (x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)$, maka persamaan (8) menjadi

$$\begin{aligned} &\int_a^b \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} dx \\ &\qquad = h \int_0^n \left(\frac{(t-0)\cdots(t-(k-1))(t-(k+1))\cdots(t-n)}{(k-0)\cdots(k-(k-1))(k-(k+1))\cdots(k-n)} \right) dt. \end{aligned} \tag{9}$$

Perhatikan penyebut pada persamaan (9), yaitu

$$(k-0)(k-1)(k-2)\cdots(k-(k-2))(k-(k-1)) = k!(-1)^{k-n}(n-k)!. \tag{10}$$

Dengan demikian persamaan (9) dapat dinyatakan dengan

$$h \int_0^n \left(\frac{(t-0)\cdots(t-(k-1))(t-(k+1))\cdots(t-n)}{(k-0)\cdots(k-(k-1))(k-(k+1))\cdots(k-n)} \right) dt = \frac{(b-a)}{n} B_k^{(n)}, \tag{11}$$

dengan

$$B_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!}\int_0^n (t-0)\cdots(t-(k-1))(t-(k+1))\cdots(t-n)dt. \tag{12}$$

Dari persamaan (11) dan persamaan (12), persamaan (7) dapat dinyatakan dengan

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{w'(x_i)}\int_a^b \frac{w(x)}{(x-x_i)}dx = \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=0}^{n} f(a+kh)B_k^{(n)}. \tag{13}$$

Jadi diperoleh formula Newton-Cotes tertutup sebagai

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} w_k^{(n)} f(a+kh), \tag{14}$$

dengan

$$w_k^{(n)} = \frac{(b-a)}{n}B_k^{(n)}. \tag{15}$$

Ada beberapa subkelas dari formula Newton-Cotes yang bergantung pada nilai bilangan bulat n. Misalnya, aturan trapesium untuk $n = 1$ dan aturan Simpson untuk $n = 2$ merupakan dua aturan pertama dalam famili Newton-Cotes. Untuk $n = 3$ diperoleh formula Simpson 3/8 dan untuk $n = 4$ formula Boole. Untuk $n = 3$ diperoleh aturan Simpson 3/8, yaitu

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left[f(a) + 3f\Big(\frac{2a+b}{3}\Big) + 3f\Big(\frac{a+2b}{3}\Big) + f(b)\right], \tag{16}$$

dengan *error* [4, h. 96]

$$E_3(f) = -\frac{(b-a)^5}{6480}f^{(4)}(\xi). \tag{17}$$

3. PERBAIKAN ATURAN KUADRATUR NEWTON-COTES

Aturan kuadratur Newton-Cotes $n + 1$ titik yang diberikan persamaan (13) dapat dinyatakan dengan

$$\int_a^{a+nh} f(x)dx \approx w_0^{(n)} f(a) + w_1^{(n)} f(a+h) + \ \ldots\ + w_n^{(n)} f(a+nh). \tag{18}$$

Formula ini adalah eksak untuk polinomial berderajat n, yaitu formula (13) bernilai eksak untuk fungsi dasar $f(x) = x^j, \quad j = 0, 1, ..., n$. Jadi bobot $w_i^{(n)}$ dapat ditentukan dengan metode koefisien tak tentu, yakni dengan mengambil

$$\int_a^{a+nh} x^j dx = \sum_{i=0}^{n} w_i^{(n)}(a+ih)^j, \qquad j = 0, 1, 2, \ \ldots\ n. \tag{19}$$

Persamaan (19) adalah sistem persamaan linear berorde $(n+1)\times(n+1)$ dalam $w_i^{(n)}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Jika a dan h diketahui dengan nilai $w_i^{(n)}$ dapat ditentukan dengan menyelesaikan sistem linear pada persamaan (19).

Ide perbaikan aturan Newton Cotes bermula dari sini, yaitu jika dijadikan a dan h sebagai dua variabel tambahan dan sistem yang ada pada persamaan (19) dipaksa harus eksak untuk polinomial dasar berderajat $n+2$, maka persamaan (19) berubah menjadi

$$\begin{aligned} \int_a^{a+nh} x^j dx &= \frac{(a+nh)^{j+1} - (a)^{j+1}}{j+1} \\ \frac{(a+nh)^{j+1} - (a)^{j+1}}{j+1} &= \sum_{i=0}^{n} w_i (a+ih)^j, \qquad j = 0, 1, ..., n+2 \end{aligned} \tag{20}$$

dimana $a, h, w_0, w_1, w_2, ..., w_n$ adalah $n+3$ variabel yang harus ditentukan.

Bila sistem (20) diselesaikan dengan Maple dengan toleransi 1.0×10^{-9}, diperoleh nilai $a, h, w_0, w_1, w_2, ..., w_n$ untuk $n = 3, \ldots, 9$ sebagaimana diberikan Tabel 1[3]. Nilai E_n pada Tabel 1 adalah nilai maksimum *error*, yaitu jika

$$e_n^{(j)} = \left| \frac{(a+nh)^{j+1} - a^{j+1}}{j+1} - \sum_{i=0}^{n} w_i (a+ih)^j \right|, \quad j = 0, 1, 2, ..., n+2, \tag{21}$$

maka

$$E_n = \max\ e_n^{(j)}, \qquad 0 \le j \le n+2. \tag{22}$$

Untuk menerapkan perbaikan aturan kuadratur Newton-Cotes tertutup dalam menghitung

$$\int_c^d \phi(t) dt, \tag{23}$$

terlebih dahulu dilakukan transformasi batas integrasi dari interval $[c, d]$ ke interval $[a, a+nh = b]$ sehingga

$$\int_c^d \phi(t) dt = \int_a^{b=a+nh} f(x) dx, \tag{24}$$

dengan

$$f(x) = \left(\frac{d-c}{b-a}\right) \phi\left(\frac{d-c}{b-a} x + \frac{bc-ad}{b-a}\right). \tag{25}$$

4. UJI KOMPUTASI

Berikut ini dilakukan uji komputasi untuk membandingkan aturan kuadratur Newton-Cotes dengan perbaikan aturan kuadratur Newton-Cotes.

Tabel 1: Nilai numerik dari $a, h, w_0, w_1, ..., w_n$

n	$I_n = [a, a+nh]$	w_i	E_n
3	$a = 0.2035833399$ $h = 0.0071569814$	$w_0 = 0.0026799531$ $w_1 = 0.0080633282$ $w_2 = 0.0080399007$ $w_3 = 0.0026877621$	1.0×10^{-10}
4	$a = -0.0389584770$ $h = 0.0166970470$	$w_0 = 0.0051899766$ $w_1 = 0.0237655253$ $w_2 = 0.0088772111$ $w_3 = 0.0237654715$ $w_4 = 0.0051900035$	8.7×10^{-11}
5	$a = 0.2205192499$ $h = 0.0118799290$	$w_0 = 0.0039222382$ $w_1 = 0.0154518739$ $w_2 = 0.0103445694$ $w_3 = 0.0102816465$ $w_4 = 0.0154834261$ $w_5 = 0.0039158909$	2.0×10^{-11}
8	$a = -0.0536080071$ $h = 0.0318344334$	$w_0 = 0.0088844348$ $w_1 = 0.0528935124$ $w_2 = -0.0083366472$ $w_3 = 0.0942885770$ $w_4 = -0.0407842241$ $w_5 = 0.0942884045$ $w_6 = -0.0083364748$ $w_7 = 0.0528934373$ $w_8 = 0.0088844477$	4.0×10^{-10}
9	$a = -0.1157446966$ $h = 0.0087645346$	$w_0 = 0.0023921801$ $w_1 = 0.0149705746$ $w_2 = -0.0035228293$ $w_3 = 0.0275229923$ $w_4 = -0.0107378677$ $w_5 = 0.0209990776$ $w_6 = 0.0063611388$ $w_7 = 0.0055498762$ $w_8 = 0.0127011417$ $w_9 = 0.0026445267$	4.0×10^{-10}

Contoh 1 Hitunglah

$$\int_0^\pi e^x \cos x dx, \tag{26}$$

secara analitik, dengan menggunakan aturan kuadratur Newton-Cotes untuk $n = 3$

dan perbaikan aturan kuadratur Newton-Cotes.

Solusi. Nilai analitik dari $\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$ adalah -12.0703463163.

Nilai integral (26) dengan menggunakan Newton-Cotes untuk $n = 3$ menggunakan formula (16), dengan $a = 0, b = \pi, n = 3$ dan $h = \frac{\pi}{3}$ adalah

$$\int_0^{\pi} e^t \cos(t) dt = -11.7994304330. \tag{27}$$

Untuk menentukan (26) menggunakan formula (19), pertama-tama ditransformasikan interval $[0, \pi]$ ke $[a, a+nh = b]$, dimana a, h adalah nilai-nilai yang terdapat pada Tabel 1. Jadi dengan menggunakan persamaan (24) dan persamaan (25) didapat

$$\int_0^{\pi} e^t \cos(t) dt = \int_{0.2035833399}^{0.2250542841} f(x) dx, \tag{28}$$

dengan

$$f(x) = \left(\frac{\pi}{nh}\right) e^{\left(\frac{\pi}{nh} x + \frac{\pi a}{nh}\right)} \cos\left(\frac{\pi}{nh} x + \frac{\pi a}{nh}\right). \tag{29}$$

Dari persamaan (29) dan Tabel 1 didapat $f(a) = 146.3183278912, f(a+h) = 208.4782974601, f(a+2h) = -594.0909951378$, dan $f(a+3h) = -3385.9074522727$, maka diperoleh nilai aproksimasi untuk (26) dengan perbaikan aturan kuadratur Newton-Cotes adalah

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} e^t \cos(t) dt &= (w_0 f(a) + w_1 f(a+h) + w_2 f(a+2h) + w_3 f(a+3h) \\ \int_0^{\pi} e^t \cos(t) dt &= -11.8037911405. \end{aligned} \tag{30}$$

Dengan demikian *error* aturan kuadratur Newton-Cotes $n = 3$ adalah $E_{NC_4} = 0.2709158833$ dan *error* perbaikan Newton-Cotes $n = 3$ adalah $E_{INC_4} = 0.2665551758$. Jika komputasi di atas dilakukan untuk $n = 4, 5, 8, 9$, maka hasilnya sebagaimana disajikan Tabel 2.

Pada Tabel 2 terlihat bahwa hasil dari nilai aproksimasi dan *error* perbaikan aturan kuadratur Newton-Cotes lebih kecil dari aturan kuadratur Newton-Cotes biasa.

Tabel 2: Hasil komputasi pengaproksimasian $\int_0^\pi e^x \cos(x)dx$ untuk $n = 4, 5, 8, 9$.

n	Aturan	Nilai aproksimasi	*Error*
4	NC_4	-11.7994304330	0.2709158833
	INC_4	-11.8037911405	0.2665551758
5	NC_5	-12.0110843157	0.0592619989
	INC_5	-12.0114155380	0.0589307783
8	NC_8	-12.0704722491	0.0001259327
	INC_8	-12.0706586341	0.0003123177
9	NC_9	-12.0703728763	0.0000265599
	INC_9	-12.0703728675	0.0000265511

UCAPAN TERIMA KASIH

Ungkapan terima kasih penulis ucapkan kepada Bapak Dr. Imran M., M.Sc. yang telah membimbing penulis dalam menyelesaikan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Burden, R. L. & Faires, J.D. 2001. *Numerical Analysis,* 7^{th}. Brooks/ Cole Pub Co., New York.

[2] Davis, P. J. & Rabinowitz, P. 1984. *Methods of Numerical Integration,* 2^{nd} Ed. Academic Press, Inc., London.

[3] Dehghan, M., Jamie, M. M,. & Eslahchi, M. R. 2005. On Numerical Improvement of Close Newton- Cotes Quadrature Rules. *Applied Mathematics and Computation.* **165**:251-260.

[4] Krylov, V. I. 1962. *Approximate Calculation of Integral.* MacMilan Co., New York.

[5] Phillips, G. M. 2003. *Interpolation and Approximation by Polynomials.* Springers-Verlag New York, Inc., New York.