ISOTOMIK KONJUGAT DARI TITIK GERGONNE DAN TITIK NAGEL

Martha Sri P.[1*], M. Natsir [2], Hasriati[2]

[1]Mahasiswa Program S1 Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Univeritas Riau
Kampus Bina Widya 28293 Indonesia

*martha_taa@yahoo.com

ABSTRACT

This paper discusses an isotomic conjugate from Gergonne point and Nagel point, which are the point of concurrence formed by connecting the vertices of a triangle with the tangent point of incircle of the triangle and the tangent point of excircle of the triangle. It also discusses the area of the triangle formed by the isotomic lines and Cartesian coordinates from Gergonne point and Nagel point.

Keywords: *concurrence of line, isotomic conjugate, Gergonne point, Nagel point.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas isotomik konjugat dari titik Gergonne dan titik Nagel, yaitu titik konkurensi yang terbentuk dari menghubungkan titik sudut segitiga dengan titik singgung lingkaran dalam segitiga dan titik singgung lingkaran singgung luar segitiga. Selanjutnya, artikel ini juga membahas mengenai luas segitiga yang terbentuk dari garis-garis yang isotomik dan koordinat Kartesius dari titik Gergonne dan titik Nagel.

Kata kunci: *isotomik konjugat, konkurensi garis, titik Gergonne, titik Nagel.*

1. PENDAHULUAN

Segitiga adalah suatu bentuk bidang datar yang dibuat dari tiga sisi yang berupa garis lurus dan tiga sudut. Di dalam suatu segitiga, banyak terdapat konkuren garis-garis lurus [2, h. 481]. Salah satu contoh kekonkurenan garis tersebut adalah kekonkurenan garis bagi segitiga dengan titik konkurensinya disebut titik *incenter* [4, h. 139] dan titik *excenter* [3]. Dari titik *incenter* ini dapat dibentuk suatu lingkaran dalam segitiga *(incircle of the triangle)*, yaitu lingkaran yang menyinggung ketiga sisi segitiga dengan titik pusat dari lingkaran dalam tersebut adalah titik *incenter* [4, h. 150], sedangkan dari titik *excenter* ini dapat dibentuk lingkaran singgung luar segitiga (*excircle of the triangle*), yaitu lingkaran yang menyinggung sebuah sisi segitiga dan perpanjangan dua sisi lainnya [4, h. 153]. Pada lingkaran dalam dan lingkaran singgung luar segitiga yang memiliki tiga titik singgung, dapat ditentukan konkurensi titik lainnya, antara lain konkurensi titik Gergonne [5] dan konkurensi titik Nagel [5]. Titik Nagel merupakan isotomik konjugat dari titik Gergonne. Isotomik konjugat adalah titik konkurensi dari garis dan garis isotomik [7, hal. 34], sedangkan garis isotomik adalah dua buah garis yang terbentuk dari dua titik yang simetris terhadap titik tengah sisi-sisi segitiga [5]. Dua titik yang simetris terhadap titik tengah sisi segitiga ini disebut titik isometrik [7].

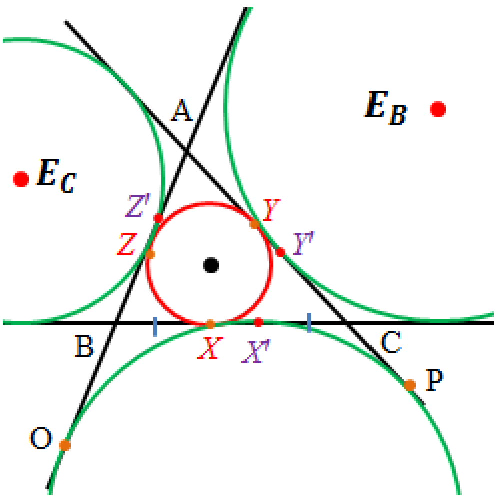
Pada artikel ini, penulis menbahas isotomik konjugat dari titik Gergonne merupakan titik Nagel, yaitu mendetailkan artikel dari Mario Dalc'in [1] dengan menentukan bahwa titik singgung lingkaran dalam dan lingkaran singgung luarnya merupakan titik isometrik, serta menentukan garis Nagel merupakan garis isotomik dari garis Gergonne yang juga konkurenan di titik Nagel. Selanjutnya, dibahas juga mengenai luas segitiga yang terbentuk dari garis-garis isotomik yang melewati titik Gergonne dan titik Nagel, serta koordinat kartesius titik Gergonne dan titik Nagel.

2. TITIK GERGONNE (*GERGONNE POINT*)

Pada bagian ini dibahas mengenai kekonkurenan titik Gergonne, yaitu titik konkurensi yang terbentuk dari menghubungkan titik sudut segitiga dengan titik singgung lingkaran dalam segitiga. Sebelum menentukan kekonkurenan titik Gergonne ini, terlebih dahulu ditentukan bahwa titik singgung lingkaran dalam dan lingkaran singgung luar segitiga merupakan titik isometrik, seperti yang dijelaskan pada proporsi [7, hal. 32] sebagai berikut.

Proposisi 1 Pada segitiga, titik singgung lingkaran dalam dan lingkaran singgung luarnya adalah isometrik.

Bukti: Perhatikan Gambar 1. Jika titik X, Y, dan Z adalah titik singgung lingkaran dalam segitiga, sedangkan titik X', Y', dan Z' adalah titik singgung lingkaran singgung luarnya. Akan ditunjukkan bahwa titik X dengan X', Y dengan Y', dan Z dengan Z' adalah titik isometrik, yaitu dengan menunjukkan panjang $BX = CX', CY = AY',$ dan $AZ = BZ'$.



Gambar 1. Titik X dan X' adalah titik isometrik.

Menurut teorema garis singgung lingkaran [2], diperoleh panjang sisi-sisi lingkaran dalam segitiga adalah

$$AY = AZ,$$

$$BX = BZ,$$

$$CX = CY.$$

Misalkan panjang sisi *BC*, *CA*, dan *AB* adalah a, b, c, sedangkan semiperimeter segitiga dinyatakan dengan $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, maka panjang sisi segitiga terhadap titik singgung dalamnya menjadi

$$AY = AZ = s - a, \tag{1}$$

$$BX = BZ = s - b, \tag{2}$$

$$CX = CY = s - c. \tag{3}$$

Kemudian, Jika titik O dan P juga merupakan titik singgung lingkaran singgung luarnya, diperoleh juga

$$AO = AP,$$

$$BO = BX', \tag{4}$$

$$CP = CX'. \tag{5}$$

Keliling $\Delta ABC = BC + AC + AB$

$$2s = (BX' + CX') + AC + AB. \tag{6}$$

Dengan mensubstitusi persamaan (4) dan (5) ke persamaan (6), diperoleh

$$2s = AO + AP.$$

Karena $AO = AP$, maka

$$s = AP,$$

$$s = AC + CP,$$

$$CP = s - b.$$

Berdasarkan persamaan (5), diperoleh

$$CX' = s - b. \tag{7}$$

Dari persamaan (2) dan (7), diperoleh

$$BX = CX' = s - b, \tag{8}$$

Dengan cara yang sama, diperoleh

$$CX = BX' = s - c. \tag{9}$$

Untuk menentukan titik isometrik lainnya pada sisi *AC* dan *AB*, dengan cara yang sama mendapatkan persamaan (8) dan (9), diperoleh

$$CY = AY' = s - c, \tag{10}$$

$$AY = CY' = s - a, \tag{11}$$

$$AZ = BZ' = s - a, \tag{12}$$

$$BZ = AZ' = s - b. \tag{13}$$

Jadi, terbukti titik *X* dengan *X'*, *Y* dengan *Y'*, dan *Z* dengan *Z'* adalah titik isometrik. ■

Selanjutnya, akan dibahas mengenai konkurensi titik Gergonne berdasarkan teorema ceva [4, h. 238] sebagai berikut

Teorema 1. (Teorema Ceva) Jika *D*, *E* dan *F* masing-masing adalah titik pada sisi *BC*, *CA*, dan *AB* pada segitiga *ABC*. Maka garis *AD*, *BE*, dan *CF* adalah konkuren (bertemu di satu titik) jika dan hanya jika

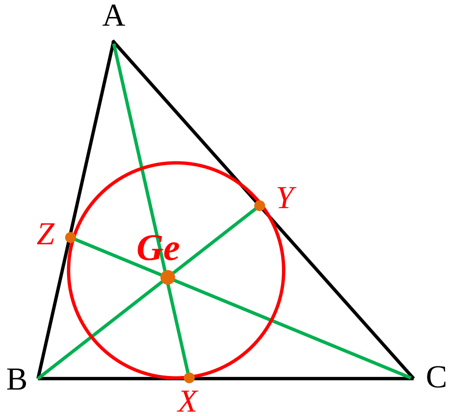
$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

Bukti: Dapat dilihat pada [4].

Adapun teorema yang menjelaskan konkurensi titik Gergonne tersebut adalah teorema Gergonne [7].

Teorema 2. (Teorema Gergonne) Pada sebuah segitiga, garis dari titik sudut segitiga *ABC* dengan titik singgung lingkaran dalamnya adalah konkuren.

Bukti: Perhatikan Gambar 2. Titik *X*, *Y*, dan *Z* adalah titik singgung lingkaran dalam segitiga. Akan di buktikan garis *AX*, *BY*, dan *CZ* adalah konkuren dititik Gergonne (*Ge*).



Gambar 2. Garis *AX*, *BY*, dan *CZ* konkuren di titik G_e.

Dengan menggunakan persamaan (1), (2), dan (3) diperoleh perbandingan panjang sisi-sisinya adalah

$$\frac{s-a}{s-b} \cdot \frac{s-b}{s-c} \cdot \frac{s-c}{s-a} = 1.$$

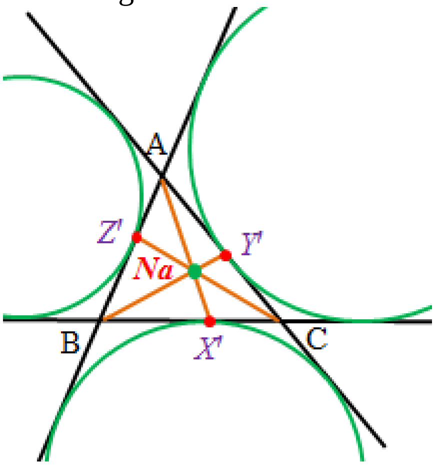
atau

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1.$$

Jadi, terbukti garis *AX*, *BY*, dan *CZ* konkuren dititik Gergonne (*Ge*). ■

3. ISOTOMIK KONJUGAT TITIK GERGONNE DAN TITIK NAGEL

Suatu ΔABC memiliki tiga lingkaran singgung luar. Perhatikan Gambar 3, masing-masing lingkaran ini menyinggung sisi BC di titik X', menyinggung sisi AC di titik Y', dan menyinggung sisi AB di titik Z', maka ke tiga garis AX', BY', dan CZ' konkuren di titik Na. Titik Na ini disebut titik Nagel.

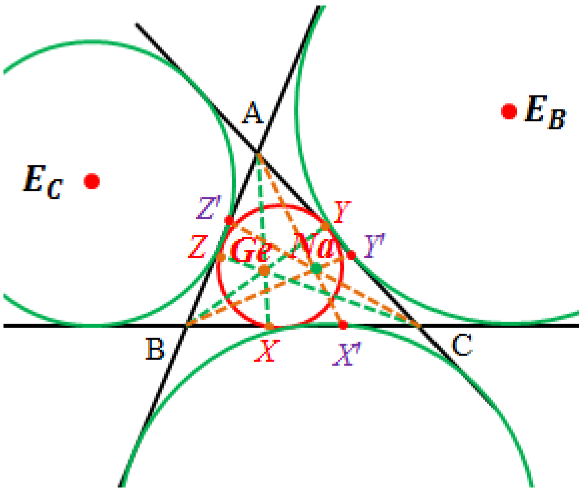


Gambar 3. Garis AX', BY', dan CZ' konkuren dititik Nagel (Na).

Adapun teorema yang menjelaskan konkurensi titik Nagel tersebut adalah teorema Nagel [7].

Teorema 3. (Teorema Nagel) Garis yang menghubungkan titik sudut segitiga ke titik singgungnya antara sisi yang berhadapan dengan lingkaran singgung luar adalah konkuren.

Bukti: Perhatikan Gambar 4. Titik X', Y', dan Z' adalah titik singgung lingkaran singgung luar segitiga. Akan dibuktikan bahwa garis AX', BY', dan CZ' konkuren di titik Nagel (Na).



Gambar 4. Konkurensi titik Ge dan Na.

Sebelumnya telah diperoleh konkurensi titik gergonne adalah

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1. \tag{15}$$

Karena titik singgung lingkaran dalam dan lingkaran singgung luarnya adalah titik isometrik, maka dengan mensubstitusikan persamaan (8), (9), (10), (11), (12), dan (13) ke persamaan (15), diperoleh

$$\frac{BZ'}{Z'A}\cdot\frac{CX'}{X'B}\cdot\frac{AY'}{Y'C}=1,$$

atau

$$\frac{AY'}{Y'C}\cdot\frac{CX'}{X'B}\cdot\frac{BZ'}{Z'A}=1.$$

Jadi, terbukti garis AX', BY', dan CZ' konkuren dititik Nagel (*Na*). ■

Setelah dibuktikan kekonkurenan titik Gergonne dan titik Nagel, selanjutnya dibahas mengenai isotomik konjugat dari titik Gergonne adalah titik Nagel. Untuk itu, berikut adalah definisi dari isotomik konjugat [7, hal. 34].

Definisi 1. Titik konkurensi dari garis dan isotomiknya adalah isotomik konjugat.

Dari [8], titik Gergonne dan titik Nagel merupakan salah satu contoh isotomik konjugat. Pada Gambar 4, karena garis isotomik dari garis Gergonne, yaitu garis Nagel juga terbukti konkuren di titik *Na*, maka berdasarkan Definisi 1 benar bahwa isotomik konjugat dari titik Gergonne adalah titik Nagel. Selanjutnya, dari isotomik konjugat titik Gergonne dan titik Nagel ini, dapat ditentukan juga luas segitiga-segitiga yang berada di dalam ΔABC, yaitu segitiga yang terbentuk dari garis-garis isotomik yang melewati titik *Ge* dan titik *Na*. Diantara segitiga tersebut adalah $\Delta AXX'$, $\Delta BYY'$, dan $\Delta CZZ'$. Selain itu, dapat ditentukan juga koordinat kartesius titik Gergonne dan titik Nagel.

Perhatikan gambar 4. Untuk menentukan luas $\Delta AXX'$, terlebih dahulu akan ditentukan panjang sisi XX', yaitu

$$BC = BX + XX' + X'C.$$

Karena $BC = a$ dan dari persamaan (8), maka panjang sisi XX' adalah

$$XX' = (b - c).$$

Tinggi $\Delta AXX'$ sama dengan tinggi ΔABC dengan a sebagai alasnya, yaitu

$$t = \frac{2L\,\Delta ABC}{a}.$$

maka $L\,\Delta AXX'$ adalah

$$L\,\Delta AXX' = \frac{1}{2}\left[(b-c)\cdot\frac{2L\,\Delta ABC}{a}\right],$$

$$= \frac{(b-c)}{a}L\,\Delta ABC.$$

Dengan cara yang sama, diperoleh juga untuk $L\Delta BYY'$ dan $L\Delta CZZ'$ adalah

$$L\Delta BYY' = \frac{(a-c)}{b} L\Delta ABC,$$

$$L\Delta CZZ' = \frac{(b-a)}{c} L\Delta ABC.$$

4. KOORDINAT KARTESIUS TITIK GERGONNE DAN TITIK NAGEL

Untuk menentukan koordinat Kartesius titik Gergonne dan titik Nagel, terlebih dahulu akan ditentukan rasio perbandingan antara titik sudut segitiga dengan titik konkurensinya yang dijelaskan pada teorema perbandingan [6] berikut.

Teorema 4. Misalkan garis *AD*, *BE*, *CF* dari segitiga *ABC* konkuren di titik *S*. Maka

$$\frac{AS}{SD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB}$$

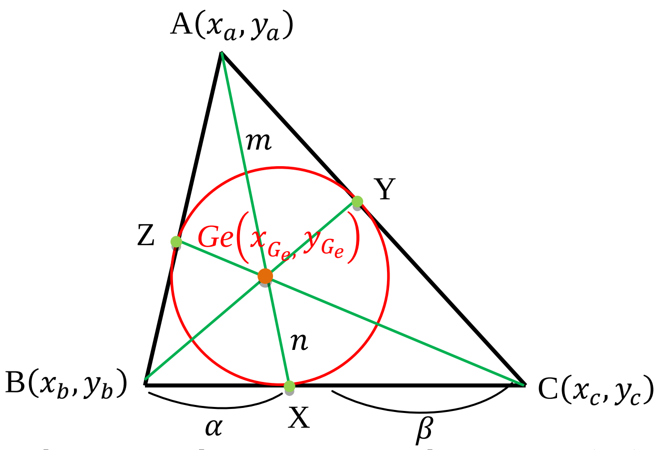
Bukti: Dapat dilihat pada [6].

Sebelum membahas koordinat Kartesius titik Gergonne dan titik Nagel, akan ditentukan terlebih dahulu koordinat Kartesius titik *incenter*. Koordinat Kartesius dari titik *incenter* adalah rata-rata panjang dari koordinat ketiga titik sudutnya dengan panjang sisi segitiga. Jika ketiga titik sudut segitiga terletak pada $(x_a, y_a), (x_b, y_b)$ dan (x_c, y_c), serta sisi dihadapan titik sudutnya mempunyai panjang *a*, *b*, dan *c*, maka koordinat Kartesius *incenter* adalah

$$I_x = \frac{a\,x_a + b\,x_b + c\,x_c}{P}, \quad I_y = \frac{a\,y_a + b\,y_b + c\,y_c}{P}$$

dimana $P = a + b + c.$

Selanjutnya, jika koordinat titik sudut $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, dan $C(x_c, y_c)$, akan ditentukan koordinat Kartesius dari titik Gergonne dan titik Nagel.



Gambar 5. Koordinat Kartesius titik Gergonne (*Ge*).

Perhatikan Gambar 5. Titik X membagi sisi BC dengan rasio $(s-b):(s-c)$, maka dengan menggunakan rasio pembagian segmen garis, koordinat titik X pada sumbu x dan y adalah

$$x_X = \frac{(s-b)\,x_c + (s-c)\,x_b}{a},$$

$$y_X = \frac{(s-b)\,y_c + (s-c)\,y_b}{a}.$$

Kemudian, titik Ge membagi garis AX sedemikian hingga dengan rasio $m:n$. Dengan menggunakan Teorema 4, maka rasio Ge adalah $m = a(s-a)$ dan $n = (s-c)(s-b)$, sehingga koordinat titik Ge pada sumbu x adalah

$$x_{Ge} = \frac{m\,x_X + n\,A}{m+n}$$

$$x_{Ge} = \frac{(s-a)(s-b)\,x_c + (s-a)(s-c)\,x_b + (s-c)(s-b)\,x_a}{a(s-a)+(s-c)(s-b)}$$

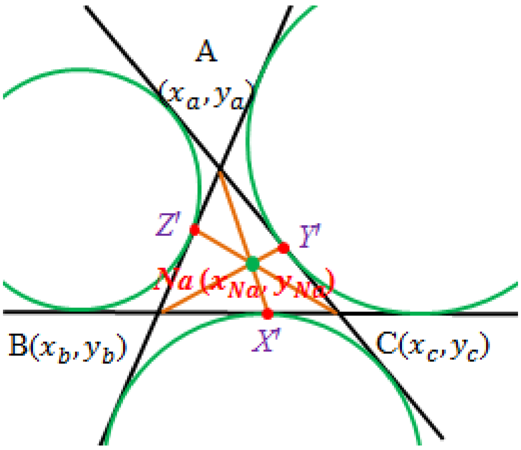
Dengan cara yang sama, untuk sumbu y adalah

$$y_{Ge} = \frac{(s-a)(s-b)\,y_c + (s-a)(s-c)\,y_b + (s-c)(s-b)\,y_a}{a(s-a)+(s-c)(s-b)}.$$

Jadi, koordinat Kartesius titik Gergonne adalah

$$G_e = \left(\frac{(s-c)(s-b)\,x_a + (s-a)(s-c)\,x_b + (s-a)(s-b)\,x_c}{a(s-a)+(s-c)(s-b)}, \frac{(s-c)(s-b)\,y_a + (s-a)(s-c)\,y_b + (s-a)(s-b)\,y_c}{a(s-a)+(s-c)(s-b)} \right).$$

Selanjutnya, perhatikan Gambar 6.



Gambar 6. Koordinat Kartesius titik Nagel (*Na*).

Jika koordinat titik sudut $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, dan $C(x_c, y_c)$, serta rasio titik *Na* adalah $p:q$, maka akan ditentukan koordinat Kartesius titik Nagel. Rasio titik X' adalah $(s-b):(s-c)$, maka koordinat titik X adalah

$$x_{X'} = \frac{(s-c)\,x_c + (s-b)\,x_b}{a},$$

$$y_{X'} = \frac{(s-c)\,y_c + (s-b)\,y_b}{a}.$$

Dengan menggunakan Teorema 4, diperoleh rasio titik Nagel adalah $p = a$ dan $q = (s-a)$. Sehingga, koordinat titik Nagel, yaitu

$$x_{Na} = \frac{a\left(\dfrac{(s-c)\,x_c + (s-b)\,x_b}{a}\right) + (s-a)\,x_a}{a + (s-a)} = \frac{(s-c)\,x_c + (s-b)\,x_b + (s-a)\,x_a}{s},$$

$$y_{Na} = \frac{a\left(\dfrac{(s-c)\,y_c + (s-b)\,y_b}{a}\right) + (s-a)\,y_a}{a + (s-a)} = \frac{(s-c)\,y_c + (s-b)\,y_b + (s-a)\,y_a}{s}.$$

Jadi, koordinat Kartesius dari titik Nagel adalah

$$N_a = \left(\frac{(s-a)\,x_a + (s-b)\,x_b + (s-c)\,x_c}{s}, \frac{(s-a)\,y_a + (s-b)\,y_b + (s-c)\,y_c}{s}\right).$$

Selain pada segitiga sebarang, koordinat Kartesius dari titik *incenter*, titik Gergonne, dan titik Nagel dapat juga ditentukan pada segitiga sama sisi. Karena semua sisi-sisi segitiga sama sisi mempunyai panjang yang sama, yaitu panjang sisi $AB = BC = CA = a$, maka koordinat Kartesius titik *incenter* untuk sumbu *x* dan y pada segitiga sama sisi adalah

$$I = \left(\frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \frac{y_a + y_b + y_c}{3}\right). \tag{16}$$

Sedangkan koordinat Kartesius titik Gergonne pada segitiga sama sisi adalah

$$Ge = \left(\frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \frac{y_a + y_b + y_c}{3}\right), \tag{17}$$

dan koordinat Kartesius titik Nagel pada segitiga sama sisi adalah

$$Na = \left(\frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \frac{y_a + y_b + y_c}{3}\right). \tag{18}$$

Dari persamaan (16), (17), dan (18), diperoleh bahwa koordinat Kartesius titik *incenter*, titik Gergonne, dan titik Nagel adalah sama, yang berarti koordinat titik-titik tersebut pada segitiga sama sisi berimpitan.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan uraian pada artikel ini, maka dapat diambil kesimpulan bahwa hanya dengan menentukan panjang sisi-sisi Gergonne dan konkurensi titik Gergonne, dapat diperoleh juga panjang sisi-sisi Nagel serta konkurensi titik Nagel dengan menggunakan isotomik konjugat kedua titik tersebut. Selanjutnya, luas segitiga yang terbentuk dari isotomik konjugat titik Gergonne dan titik Nagel ini, ada kaitannya dengan luas segitiga asal. Hal ini dikarenakan tinggi segitiga-segitiga tersebut sama dengan tinggi segitiga asal. Kemudian, pada segitiga sebarang, koordinat Kartesius dari titik *incenter*, titik Gergonne, dan titik Nagel berada pada koordinat yang berbeda, sedangkan pada segitiga sama sisi koordinat Kartesius ketiga titik tersebut berada pada koordinat yang sama, sehingga ketiga titik ini berimpit.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Dalc'in, M. 2003. Isotomic Inscribed Triangles and Their Residuals. *Forum Geometricorum*, **3**:125-134.

[2] Down Jr., F. L. 1964. *Geometry*. Addison-Wesley Publishing Company, INC., Reading.

[3] Kisil, V. V. 2003. Geometry. 34 hal. https://www1.maths.leeds.ac.uk/pure/staff/kisilv/coursse/math255.pdf, 27 Desemberr 2013.

[4] Mashadi. 2012. *Geometri*. Pusbangdik Universitas Riau, Pekanbaru.

[5] Minculet, N. & Barbu, C. 2012. Cevian Of Rank (k, l, m) In Triangles. *Internasional Journal Of Geometrical*, **1**/2 (2012): 22-23.

[6] Sastry, K. R. S. 2001. Heron Triangles: A Gergonne-Cevian-and-Median Perspective. *Forum Geometricorum*. **1**(2001): 17-24

[7] Smarandache, F. & Pătraşcu, I. 2012. *The Geometry Of Homological Triangles*. The Education Publisher, INC., USA.

[8] Yiu, P. 1998. Euclidean Geometry. 174 hal. http://ohkawa.cc.it-hiroshima.ac.jp/AoPS.pdf/eulideangeometrynotes-paul.pdf, 29 April 2013.