**PENAKSIR *RATIO-CUM-PRODUCT* YANG EFISIEN UNTUK RATA-RATA
POPULASI PADA SAMPLING ACAK SEDERHANA MENGGUNAKAN
KOEFSIEN VARIASI DAN KOEFISIEN KURTOSIS**

Liza Yarmanita^{1*}, Arisman Adnan², Firdaus²

¹Mahasiswa Program S1 Matematika

²Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru, 28293, Indonesia

*liza.yarmanita@unri.ac.id

ABSTRACT

This article reviews three ratio-cum-product estimators for the population mean in simple random sampling. The coefficient of variation and the coefficient of kurtosis of auxiliary variables are used. This article is the review of Taylor's *et. al.* Article [*Communications of the Korean Statistical Society* 18(2):155-164]. The estimators discussed are ratio-cum-product estimator, type 1 and type 2 ratio-cum-product estimators using coefficient of variation and coefficient of kurtosis. These estimators are biased. Then, the *mean square errors (MSE)* of each estimator are compared to show which one is the most efficient estimator. The type 2 ratio-cum-product estimator using the information on coefficient of variation and coefficient of kurtosis is the most efficient estimator among the other two estimators.

Keywords: *ratio-cum-product estimator, coefficient of variation, coefficient of kurtosis, bias, mean square error.*

ABSTRAK

Artikel ini merupakan review tiga penaksir *ratio-cum-product* untuk rata-rata populasi pada sampling acak sederhana. Penaksir *ratio-cum-product* ini menggunakan variabel tambahan yaitu koefisien variasi dan koefisien kurtosis. Artikel ini adalah kajian ulang dari artikel Taylor *et. al.* [*Communications of the Korean Statistical Society* 18(2):155-164]. Penaksir yang dibahas adalah penaksir *ratio-cum-product*, penaksir *ratio-cum-product* tipe 1 dan tipe 2 menggunakan koefisien variasi dan koefisien kurtosis. Ketiga penaksir ini merupakan penaksir yang bias. Selanjutnya, *MSE* dari ketiga penaksir tersebut dibandingkan untuk memperoleh penaksir yang paling efisien. Penaksir *ratio-cum-product* tipe 2 yang menggunakan koefisien variasi dan koefisien kurtosis adalah penaksir yang paling efisien dari dua penaksir lainnya.

Kata kunci: *penaksir ratio-cum-product, koefisien variasi, koefisien kurtosis, bias, mean square error.*

1. PENDAHULUAN

Metode *ratio* merupakan salah satu metode yang digunakan jika suatu variabel pendukung (*auxiliary variable*) X yang diketahui dari suatu parameter berkorelasi positif dengan variabel Y yang diteliti. Adapun metode *product* merupakan salah satu metode yang digunakan jika suatu variabel pendukung X yang diketahui dari suatu parameter berkorelasi negatif dengan variabel Y yang diteliti. Tujuan metode ini adalah untuk meningkatkan presisi penaksir dengan mengambil manfaat hubungan X dan Y [1].

Pada artikel ini digunakan metode *ratio-cum-product* yang merupakan salah satu teknik untuk meningkatkan ketelitian suatu penaksir dengan mengambil manfaat hubungan dua variabel pendukung X_1 dan X_2 yang diketahui dari suatu parameter dengan variabel Y yang diteliti. Andaikan variabel pendukung X_1 berkorelasi positif dengan variabel Y dan variabel pendukung X_2 berkorelasi negatif dengan variabel Y .

Singh (1967) mengajukan penaksir *ratio-cum-product* untuk rata-rata populasi pada sampling acak sederhana tanpa pengembalian [3]. Dan Tailor *et. al.* (2011) mengajukan penaksir *ratio-cum-product* tipe 1 dan tipe 2 menggunakan koefisien variasi dan koefisien kurtosis [4]. Adapun penaksir yang dibahas pada artikel ini adalah penaksir *ratio-cum-product* untuk rata-rata populasi pada sampling acak sederhana, penaksir *ratio-cum-product* tipe 1 dan tipe 2 menggunakan koefisien variasi dan koefisien kurtosis.

Berdasarkan ide dari Tailor *et. al.* [4], penulis mendetailkan bias dan *MSE* dari masing-masing penaksir. Penulis membandingkan *MSE* dari ketiga penaksir untuk memperoleh penaksir *ratio-cum-product* yang paling efisien. Penaksir yang paling efisien untuk penaksir bias adalah penaksir yang mempunyai *MSE* minimum.

2. SAMPLING ACAK SEDERHANA

Penarikan sampel acak sederhana merupakan suatu metode untuk memilih n unit sampel dari N unit populasi, sehingga setiap unit populasi memiliki kesempatan yang sama untuk dipilih menjadi unit sampel. Pada setiap penarikan akan terjadi kemungkinan besar terambilnya unit yang sama, sehingga hasil yang diperoleh kurang representatif. Oleh karena itu, agar karakteristik unit-unit lebih akurat maka dilakukan penarikan sampel acak tanpa pengembalian [1].

Banyaknya sampel yang terbentuk pada penarikan sampel acak sederhana tanpa pengembalian adalah C_n^N sampel yang berbeda dengan memiliki kesempatan yang sama untuk terpilih. Probabilitas terpilihnya anggota n dari N unit populasi sebagai unit sampel pada penarikan pertama yaitu n/N , probabilitas pada penarikan kedua adalah $(n-1)/(N-1)$ sampai probabilitas pada penarikan ke- n yaitu $1/(N-n+1)$ maka probabilitas seluruh n unit tertentu yang terpilih dalam n penarikan adalah $1/C_n^N$ [1].

Untuk menentukan bias dan *MSE* pada sampling acak sederhana digunakan teorema variansi dan kovariansi.

Teorema 1 [1 : h. 27] Variansi dari rata-rata $\bar{y}$ pada sampling acak sederhana yaitu

$$V(\bar{y}) = \frac{(1-f)}{n} S_y^2,$$

dimana $f = n/N$ adalah fraksi penarikan sampel dan $S_y^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 / (N-1)$ adalah variansi y_i pada populasi berkarakter Y .

Bukti dari teorema ini dapat dilihat pada [1 : h. 27].

Teorema 2 [1 : h. 29] Jika y_i dan x_i adalah sebuah pasangan yang bervariasi ditetapkan pada unit dalam populasi dan $\bar{y}$, $\bar{x}$ adalah rata-rata dari sampel acak sederhana berukuran n , maka kovariansinya yaitu

$$Cov(\bar{y}, \bar{x}) = \frac{1-f}{n} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{X}).$$

Bukti dari teorema ini dapat dilihat pada [1 : h. 29].

3. PENAKSIR *RATIO-CUM-PRODUCT* UNTUK RATA-RATA POPULASI PADA SAMPLING ACAK SEDERHANA

Terdapat tiga penaksir *ratio-cum-product* untuk rata-rata populasi pada sampling acak sederhana dalam pembahasan ini dengan menggunakan beberapa informasi tambahan yaitu koefisien variasi dan koefisien kurtosis.

Penaksir *ratio-cum-product* untuk rata-rata populasi pada sampling acak sederhana menggunakan koefisien variasi dan koefisien kurtosis adalah

$$\hat{Y}_{RCP1} = \bar{y} \left(\frac{\bar{X}_1}{\bar{x}_1} \right) \left(\frac{\bar{x}_2}{\bar{X}_2} \right), \quad (1)$$

$$\hat{Y}_{RCP2} = \bar{y} \left(\frac{\bar{X}_1 C_{x_1} + \beta_2(x_1)}{\bar{x}_1 C_{x_1} + \beta_2(x_1)} \right) \left(\frac{\bar{x}_2 C_{x_2} + \beta_2(x_2)}{\bar{X}_2 C_{x_2} + \beta_2(x_2)} \right), \quad (2)$$

$$\hat{Y}_{RCP3} = \bar{y} \left(\frac{\bar{X}_1 \beta_2(x_1) + C_{x_1}}{\bar{x}_1 \beta_2(x_1) + C_{x_1}} \right) \left(\frac{\bar{x}_2 \beta_2(x_2) + C_{x_2}}{\bar{X}_2 \beta_2(x_2) + C_{x_2}} \right). \quad (3)$$

Bias dan *MSE* penaksir *ratio-cum-product* untuk rata-rata populasi pada sampling acak sederhana menggunakan koefisien variasi dan koefisien kurtosis.

Bias dan *MSE* dari persamaan (1) adalah

$$B(\hat{Y}_{RCP1}) \approx \theta \bar{Y} (C_{x_1}^2 (1 - K_{yx_1}) + C_{x_2}^2 (K_{yx_2} - K_{x_1 x_2}))$$

dan

$$MSE(\hat{Y}_{RCP1}) \approx \theta \bar{Y}^2 (C_y^2 + C_{x_1}^2 (1 - 2K_{yx_1}) + C_{x_2}^2 (1 + 2(K_{yx_2} - K_{x_1 x_2}))) \quad (4)$$

dengan $\theta = (1-f)/n$, $K_{x_1 x_2} = \rho_{x_1 x_2} C_{x_1} / C_{x_2}$, $K_{yx_i} = \rho_{yx_i} C_y / C_{x_i}$, dan $C_{x_i} = S_{x_i} / \bar{X}_i$; $i = 1, 2$.

Bias dan MSE dari persamaan (2) adalah

$$B\left(\hat{\bar{Y}}_{RCP2}\right) \approx \theta \bar{Y} \left(\lambda_1 C_{x_1}^2 (\lambda_1 - K_{yx_1}) + \lambda_2 C_{x_2}^2 (K_{yx_2} - \lambda_1 K_{x_1x_2}) \right)$$

dan

$$MSE \left(\hat{\bar{Y}}_{RCP2} \right) \approx \theta \bar{Y}^2 \left(C_y^2 + \lambda_1 C_{x_1}^2 (\lambda_1 - 2K_{yx_1}) + \lambda_2 C_{x_2}^2 (\lambda_2 + 2(K_{yx_2} - \lambda_1 K_{x_1x_2})) \right) \quad (5)$$

dengan $\lambda_i = \frac{\bar{X}_i C_{x_i}}{\bar{X}_i C_{x_i} + \beta_2(x_i)}$; $i = 1, 2$.

Bias dan MSE dari persamaan (3) adalah

$$B\left(\hat{\bar{Y}}_{RCP3}\right) \approx \theta \bar{Y} \left(\gamma_1 C_{x_1}^2 (\gamma_1 - K_{yx_1}) + \gamma_2 C_{x_2}^2 (K_{yx_2} - \gamma_1 K_{x_1x_2}) \right)$$

dan

$$MSE \left(\hat{\bar{Y}}_{RCP3} \right) \approx \theta \bar{Y}^2 \left(C_y^2 + \gamma_1 C_{x_1}^2 (\gamma_1 - 2K_{yx_1}) + \gamma_2 C_{x_2}^2 (\gamma_2 + 2(K_{yx_2} - \gamma_1 K_{x_1x_2})) \right) \quad (6)$$

dengan $\gamma_i = \frac{\bar{X}_i \beta_2(x_i)}{\bar{X}_i \beta_2(x_i) + C_{x_i}}$; $i = 1, 2$.

4. PENAKSIR *RATIO-CUM-PRODUCT* YANG EFISIEN

Penaksir yang efisien dari penaksir bias dapat ditentukan dengan membandingkan MSE yang telah diperoleh dari masing-masing penaksir. Semakin kecil MSE yang diperoleh maka penaksir tersebut akan semakin efisien.

Untuk melihat penaksir yang efisien dari ketiga penaksir yang diajukan dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut

1. Perbandingan antara $MSE \left(\hat{\bar{Y}}_{RCP1} \right)$ pada persamaan (4) dengan $MSE \left(\hat{\bar{Y}}_{RCP2} \right)$ pada persamaan (5) diperoleh

$$MSE \left(\bar{Y}_{RCP2} \right) < MSE \left(\hat{\bar{Y}}_{RCP1} \right), \quad (7)$$

jika $C_{x_1} < C_{x_{i(1)}}$ atau $C_{x_1} > C_{x_{i(2)}}$ untuk $\lambda_1^2 - 1 < 0$.

2. Perbandingan antara $MSE \left(\hat{\bar{Y}}_{RCP1} \right)$ pada persamaan (4) dengan $MSE \left(\hat{\bar{Y}}_{RCP3} \right)$ pada persamaan (6) diperoleh

$$MSE \left(\bar{Y}_{RCP3} \right) < MSE \left(\hat{\bar{Y}}_{RCP1} \right), \quad (8)$$

jika $C_{x_1} < C_{x_{i(1)}}$ atau $C_{x_1} > C_{x_{i(2)}}$ untuk $\gamma_1^2 - 1 < 0$.

3. Perbandingan antara $MSE \left(\hat{\bar{Y}}_{RCP2} \right)$ pada persamaan (5) dengan $MSE \left(\hat{\bar{Y}}_{RCP3} \right)$ pada persamaan (6) diperoleh

$$MSE \left(\bar{Y}_{RCP3} \right) < MSE \left(\hat{\bar{Y}}_{RCP2} \right), \quad (9)$$

jika :

- a. $C_{x_1} < C_{x_{i(1)}}$ atau $C_{x_1} > C_{x_{i(2)}}$ untuk $-\lambda_1 < \gamma_1 < \lambda_1$
- b. $C_{x_{i(2)}} < C_{x_1} < C_{x_{i(1)}}$ untuk $\gamma_1 < -\lambda_1$ atau $\gamma_1 > \lambda_1$.

5. CONTOH

Contoh berikut ini merupakan data volume ekspor karet di Provinsi Riau, harga karet di pasar dunia, dan kurs rupiah terhadap dolar Amerika [2]. Data yang diambil adalah data tahunan, yaitu dari tahun 1983 - 2002. Data volume ekspor karet di Provinsi Riau (Y) merupakan variabel yang akan ditaksir dengan memanfaatkan variabel tambahan yaitu harga karet di pasar dunia (X_1) dan kurs rupiah terhadap dolar Amerika (X_2) diberikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Data Volume Ekspor Karet di Provinsi Riau, Tingkat Harga Karet di Pasar Dunia, dan Kurs Rupiah terhadap Dolar Amerika Tahun 1983-2002

No	Tahun	Harga Karet (X_1)	Kurs Rupiah (X_2)	Volume Ekspor (Y)
1	1983	36,097	1.572,00	61,000
2	1984	35,354	1.583,00	59,517
3	1985	38,370	1.595,00	62,000
4	1986	42,015	1.615,00	68,914
5	1987	42,154	1.627,00	69,713
6	1988	61,260	1.729,00	84,000
7	1989	69,940	1.795,48	104,000
8	1990	58,350	1.901,00	90,000
9	1991	41,240	1.992,00	78,693
10	1992	43,730	2.062,00	80,892
11	1993	41,700	2.110,00	64,000
12	1994	38,310	2.200,00	44,000
13	1995	67,710	2.308,00	81,000
14	1996	68,680	2.383,00	82,000
15	1997	51,010	4.650,00	48,000
16	1998	36,760	8.025,00	38,000
17	1999	53,350	7.100,00	124,606
18	2000	51,290	9.595,00	115,505
19	2001	64,750	10.400,00	367,625
20	2002	85,530	8.940,00	740,540

Sumber: [2].

Berdasarkan data pada Tabel 1 akan ditentukan penaksir *ratio-cum-product* yang efisien untuk menaksir rata-rata volume ekspor karet per tahun dengan menggunakan syarat penaksir lebih efisien yang diperoleh sebelumnya. Hal ini secara umum dapat ditunjukkan dengan menghitung *MSE* dari masing-masing penaksir. Sebagai informasi tambahan untuk menaksir rata-rata volume ekspor karet per tahun digunakan harga karet di pasar dunia dan kurs rupiah terhadap dolar Amerika. Untuk menghitung *MSE* dari masing-masing penaksir terlebih dahulu ditentukan nilai yang dibutuhkan. Informasi yang diperoleh dari data volume ekspor karet di Provinsi Riau, harga karet di pasar dunia, dan kurs rupiah terhadap dolar Amerika dengan menggunakan Microsoft Excel, yaitu

$$\begin{array}{llll} \bar{Y} = 123,200 & C_y = 1,3053 & \rho_{yx_1} = 0,6736 & N = 20 \quad n = 4 \\ \bar{X}_1 = 51,380 & C_{x_1} = 0,2781 & \rho_{yx_2} = 0,5932 & \beta_2(x_1) = 2,8341 \\ \bar{X}_2 = 3.759,124 & C_{x_2} = 0,8303 & \rho_{x_1x_2} = 0,3489 & \beta_2(x_2) = 2,8667. \end{array}$$

Dengan menggunakan informasi sebelumnya, diperoleh bahwa

- (i) $MSE(\hat{Y}_{RCP2}) < MSE(\hat{Y}_{RCP1})$ jika $C_{x_1} < 0,0063$ atau $C_{x_1} > 1,2695$,
- (ii) $MSE(\hat{Y}_{RCP3}) < MSE(\hat{Y}_{RCP1})$ jika $C_{x_1} < 0,0475$ atau $C_{x_1} > 1,1342$,
- (iii) $MSE(\hat{Y}_{RCP3}) < MSE(\hat{Y}_{RCP1})$ jika $0,0059 < C_{x_1} < 1,2712$.

Selanjutnya nilai *MSE* dari masing-masing penaksir diberikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Nilai *MSE* untuk ketiga penaksir

Penaksir <i>Ratio-Cum-Product</i>	<i>MSE</i>
$\hat{Y}_{RCP1}$	9.429,126
$\hat{Y}_{RCP2}$	9.401,462
$\hat{Y}_{RCP3}$	9.341,407

Berdasarkan Tabel 2 dapat dilihat bahwa $MSE(\hat{Y}_{RCP3})$ merupakan *MSE* yang minimum, sehingga dapat dikatakan bahwa penaksir $\hat{Y}_{RCP3}$ lebih efisien dari penaksir $\hat{Y}_{RCP1}$ dan penaksir $\hat{Y}_{RCP2}$.

6. KESIMPULAN

Setelah diperoleh nilai *MSE* dari masing-masing penaksir *ratio-cum-product* untuk rata-rata populasi yang diajukan pada sampling acak sederhana. Kemudian membandingkan *MSE* dari masing-masing penaksir, sehingga penaksir $\hat{Y}_{RCP2}$ lebih

efisien dari penaksir $\hat{Y}_{RCP1}$ jika syarat pada persamaan (7) terpenuhi, penaksir $\hat{Y}_{RCP3}$ lebih efisien dari penaksir $\hat{Y}_{RCP1}$ jika syarat pada persamaan (8) terpenuhi, penaksir $\hat{Y}_{RCP3}$ lebih efisien dari penaksir $\hat{Y}_{RCP2}$ jika syarat pada persamaan (9) terpenuhi. Jadi, dapat disimpulkan bahwa penaksir *ratio-cum-product* $\hat{Y}_{RCP3}$ merupakan penaksir yang paling efisien dari penaksir *ratio-cum-product* $\hat{Y}_{RCP1}$ dan penaksir *ratio-cum-product* $\hat{Y}_{RCP2}$ jika syarat efisien terpenuhi.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Cochran, W. G. 1991. *Teknik Penarikan Sampel, Edisi Ketiga*. Terj. Dari Sampling Techniques, oleh Radiansyah & E. R. Osman. Penerbit Universitas Indonesia, Jakarta.
- [2] Samosir, L. 2005. *Faktor-faktor yang Mempengaruhi Volume Ekspor Karet di Propinsi Riau*. Skripsi Jurusan Ilmu Ekonomi Fakultas Ekonomi Universitas Riau, Pekanbaru.
- [3] Singh, H. P & R. Tailor. 2005. Estimation of Finite Population Mean Using Known Correlation Coefficient between Auxiliary Characters. *Statistica* **65** : 407-418.
- [4] Tailor, R, R. Parmar, J. M. Kim, & R. Tailor. 2011. Ratio-Cum-Product Estimators of Population Mean Using Known Population Parameters of Auxiliary Variates. *Communications of the Korean Statistical Society* **18**(2) : 155-164.