KONKURENSI TITIK GERGONNE

Trisna Desi[1*], M. Natsir[2], Hasriati[2]

[1]Mahasiswa Program S1 Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Univeritas Riau
Kampus Bina Widya 28293 Indonesia

*desitrisnanurbi@yahoo.com

ABSTRACT

This paper discusses the proof of the concurrent from Gergonne point. The Gergonne point of a triangle is the point at which the three lines from vertices to the points of tangency between the incircle and the sides of the triangle are concurrent. Concurrent Gergonne point can be proved through several methods and using Ceva theorem. The concurrence of Gergonne point is also proved on excircle of triangle.

Keywords: *Ceva theorem, concurrent, excircle, Gergonne point, incircle*

ABSTRAK

Artikel ini membahas pembuktian konkurensi titik Gergonne. Titik Gergonne pada segitiga adalah titik yang berasal dari tiga garis dari ketiga sudut segitiga ke titik singgung antara lingkaran dalam dan sisi segitiga yang konkuren. Konkurensi titik Gergonne dalam segitiga dibuktikan melalui berbagai cara, dengan menggunakan teorema Ceva. Kemudian dibuktikan konkurensi titik Gergonne pada lingkaran singgung luar segitiga.

Kata kunci: *konkuren, lingkaran dalam, lingkaran singgung luar, teorema Ceva, titik Gergonne*

1. PENDAHULUAN

Misalkan terdapat segitiga sebarang dengan lingkaran yang berada di dalam, lingkaran yang menyinggung ketiga sisinya yang berpusat pada titik pusat lingkaran dalam (*incenter*) [1, h. 503], sehingga terdapat tiga titik singgung terhadap segitiga, yang mana apabila di tarik garis dari ketiga titik sudut segitiga terhadap titik singgung lingkaran dalam (*incircle*) [8, h.150] terhadap sisi segitiga tersebut, maka ketiga garis tersebut akan berpotongan pada satu titik (*concurrent*) [1, h. 481] yang disebut titik Gergonne [6,7]. Selanjutnya jika terdapat lingkaran singgung luar segitiga (*excircle*) [8, h. 154], dengan titik pusat lingkaran singgung luar segitiga yang disebut (*excenter*), juga dapat dibentuk titik Gergonne di luar segitiga yang berasal dari lingkaran singgung luar terhadap segitiga. [2] sehingga dapat dibentuk tiga buah titik Gergonne lainnya dari tiga lingkaran singgung terhadap ketiga sisi segitiga [3].

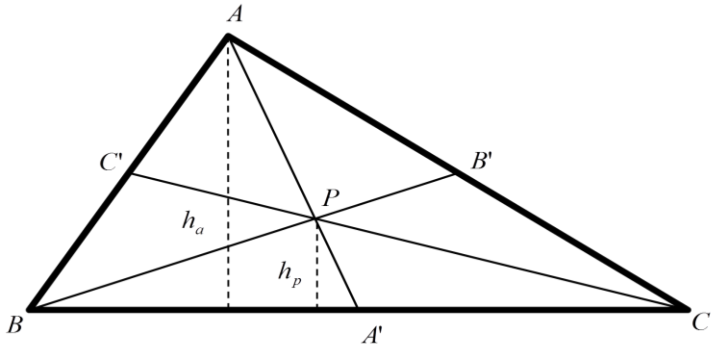
Boyd dan Raychowdhury [7], telah membahas bagaimana membuktikan konkurensi titik Gergonne dengan menggunakan lingkaran kosentrik dari lingkaran dalam segitiga asal. Pada artikel ini, penulis membahas cara lain membuktikan konkurensi titik Gergonne tersebut dengan menggunakan cara yang telah dibahas pada tulisan lainnya, yaitu melalui garis singgung lingkaran [4], semiperimeter pada segitiga [5], dan segitiga kongruen [6]. Selanjutnya penulis juga membahas konkurensi titik Gergonne di luar segitiga melalui semiperimeter segitiga [3].

2. TITIK GERGONNE DALAM SEGITIGA

Pada bagian ini dibahas mengenai konkurensi titik Gergonne dalam segitiga, untuk membuktikan konkurensi titik Gergonne, akan digunakan teorema Ceva [8, h. 238].

Teorema 1. (Teorema Ceva) Jika diberikan sebuah ΔABC dengan titik A', B', dan C' masing-masing terletak pada sisi BC, CA, dan AB. Maka garis AA', BB', dan CC' berpotongan di satu titik jika dan hanya jika

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1. \qquad (1)$$



Gambar 1. Ketiga garis AA', BB', dan CC' berpotongan di titik P.

Bukti: $(\Rightarrow)$ Misalkan ketiga garis AA', BB', dan CC' konkuren di P, akan ditunjukkan persamaan 1 berlaku. Pada Gambar 1, perhatikan $\Delta BAA'$ dan $\Delta CAA'$ dengan masing-masing alasnya BA' dan CA'. Misalkan h_a merupakan tinggi dari kedua segitiga tersebut. Kemudian perhatikan $\Delta BPA'$ dan $\Delta CPA'$ dengan masing-masing alasnya BA' dan $A'C$. Misalkan h_p merupakan tinggi dari kedua segitiga tersebut sehingga diperoleh

$$\frac{L\Delta BPA}{L\Delta CPA}=\frac{L\Delta BAA'-L\Delta BPA'}{L\Delta CAA'-L\Delta CPA'}=\frac{\frac{1}{2}BA'\cdot h_a-\frac{1}{2}BA'\cdot h_p}{\frac{1}{2}A'C\cdot h_a-\frac{1}{2}A'C\cdot h_p} \qquad (2)$$

$$\frac{L\Delta BPA}{L\Delta CPA}=\frac{\frac{1}{2}BA'\left(h_a-h_p\right)}{\frac{1}{2}A'C\left(h_a-h_p\right)}$$

$$\frac{L\Delta BPA}{L\Delta CPA}=\frac{BA'}{A'C} \tag{3}$$

dengan cara yang sama untuk $\Delta CBB'$ dan $\Delta ABB'$ diperoleh

$$\frac{L\Delta CPB}{L\Delta BPA}=\frac{CB'}{B'A} \tag{4}$$

kemudian untuk $\Delta ACC'$ dan $\Delta BCC'$ diperoleh

$$\frac{L\Delta CPA}{L\Delta CPB}=\frac{AC'}{C'B} \tag{5}$$

jadi dari persamaan (3), (4), dan (5) didapat

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=\frac{L\Delta CPA}{L\Delta CPB}\cdot\frac{L\Delta BPA}{L\Delta CPA}\cdot\frac{L\Delta CPB}{L\Delta BPA}$$

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1.$$

$(\Leftarrow)$Untuk membuktikan sebaliknya, jika diketahui persamaan (1), maka akan ditunjukkan bahwa ketiga garis AA', BB', dan CC' berpotongan pada satu titik. Misalkan garis BB' dan CC' berpotongan pada satu titik P. Selanjutnya dibuat garis AP dan perpanjang sehingga memotong sisi BC, katakanlah titik potongnya adalah titik P', maka berlaku

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BP'}{P'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1$$

jadi

$$\frac{BP'}{P'C}=\frac{B'A}{CB'}\cdot\frac{C'B}{AC'} \tag{6}$$

maka persamaan (6) menjadi

$$\frac{BP'}{P'C}=\frac{L\Delta BPA}{L\Delta CPA}$$

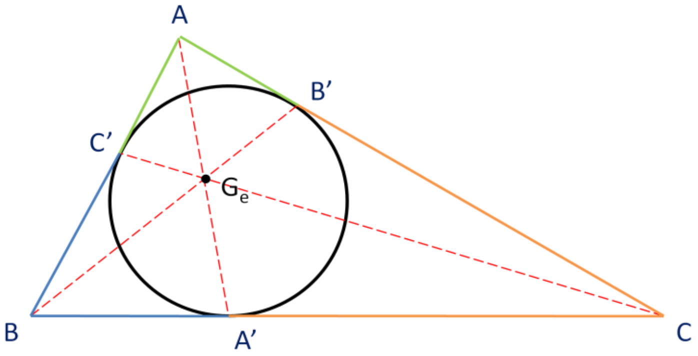
$$\frac{BP'}{P'C}=\frac{BA'}{A'C}$$

Karena $P'=A'$ dan hanya ada satu garis yang merupakan perpanjangan dari titik sudut A yang memotong garis BB' dan CC' tepat di titik P yaitu garis AA'. Jadi, garis AA', BB', dan CC' berpotongan di titik P. ■

Teorema 2. (Teorema Gergonne) Di dalam segitiga garis yang dibentuk dari titik-titik puncak ΔABC yang dihubungkan dengan titik singgung lingkaran dalam pada sisi di hadapannya adalah konkuren.

Bukti: Akan ditunjukkan AA', BB', dan CC' konkuren di Ge. Konkurensi titik Gergonne dalam pada segitiga dibuktikan dengan menggunakan empat cara yaitu

Cara 1. Dengan menggunakan garis singgung pada lingkaran.



Gambar 2. Garis singgung lingkaran di dalam ΔABC .

Konkurensi titik Ge menggunakan garis singgung lingkaran, telah dibahas pada [4]. Perhatikan Gambar 2, beberapa garis singgung pada lingkaran dalam ΔABC yang memiliki panjang yang sama yaitu:

$$B'A = AC' \tag{7}$$

$$BA' = C'B \tag{8}$$

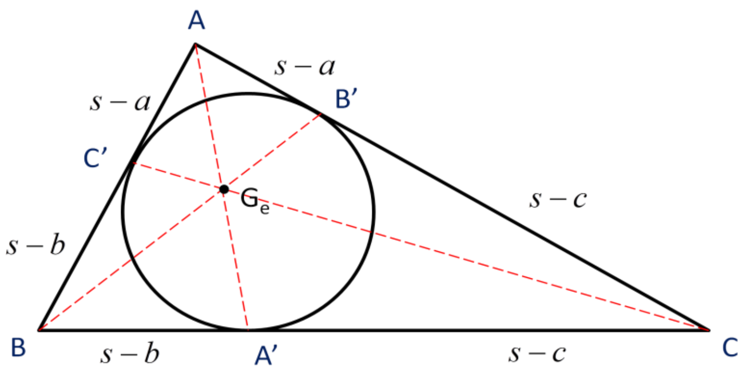
$$A'C = CB' \tag{9}$$

dengan menggunakan Teorema 1, maka persamaan (7), (8), dan (9) menjadi

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A} = \frac{AC'}{B'A}\cdot\frac{BA'}{C'B}\cdot\frac{CB'}{A'C}$$

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A} = 1. \qquad \blacksquare$$

Cara 2. Dengan menggunakan semiperimeter pada ΔABC .



Gambar 3. ΔABC yang memuat panjang sisinya.

Perhatikan Gambar 3, konkurensi titik Ge melalui semiperimeter ini, menggunakan ide dari [5], jika dimisalkan $BC = a,\ AC = b,\ AB = c$, maka diperoleh persamaan

$$AB' = s - a \tag{10}$$

$$BA' = s - b \tag{11}$$

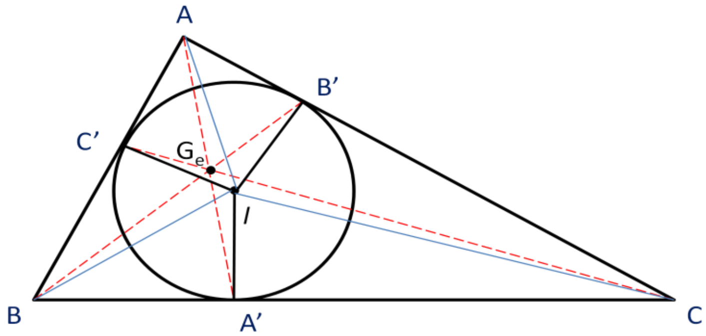
$$CB' = s - c \tag{12}$$

dengan menggunakan Teorema 1, persamaan (10), (11), dan (12) diperoleh

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \frac{s-a}{s-b} \cdot \frac{s-b}{s-c} \cdot \frac{s-c}{s-a}$$

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1. \qquad \blacksquare$$

Cara 3. Menggunakan segitiga kongruen.



Gambar 4. ΔABC yang memuat titik *incenter*nya.

Perhatikan Gambar 4, konkurensi titik Ge melalui segitiga kongruen telah dibahas pada [6]. Berdasarkan korespodensi (sd-s-sd) diperoleh

$$\Delta IBA' \cong \Delta IBC'$$

$$\Delta ICA' \cong \Delta ICB'$$

$$\Delta IAB' \cong \Delta IAC'$$

sehingga diperoleh

$$BA' = C'B \tag{13}$$

$$A'C = CB' \tag{14}$$

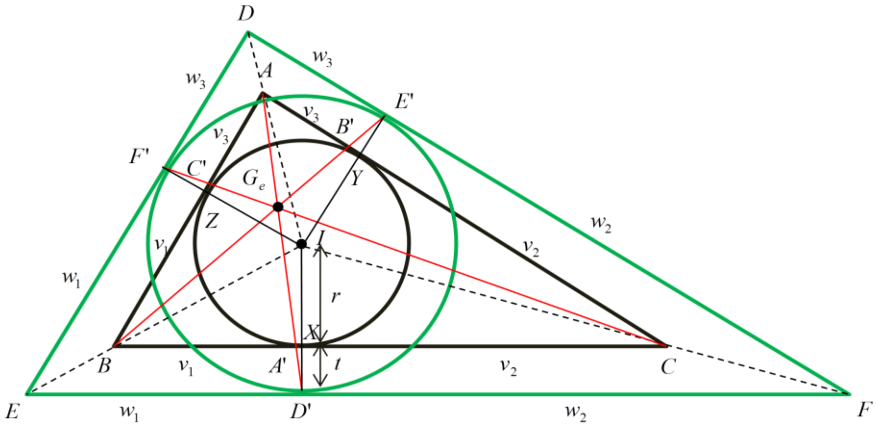
$$B'A = AC' \tag{15}$$

dengan menggunakan Teorema 1, maka persamaan (13), (14), dan (15) menjadi

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \frac{BA'}{C'B} \cdot \frac{A'C}{CB'} \cdot \frac{B'A}{AC'} = 1. \qquad \blacksquare$$

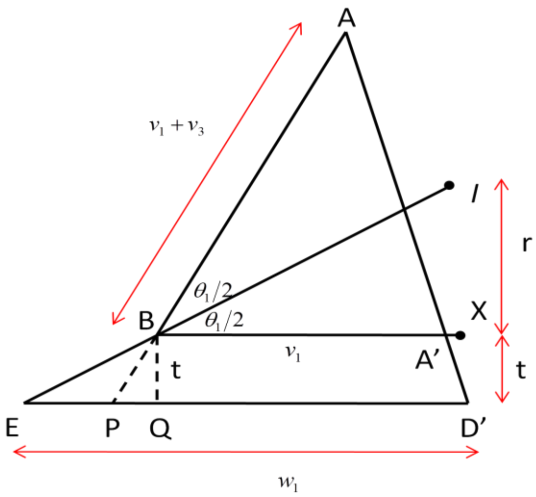
Cara 4. Menggunakan lingkaran kosentrik.

Untuk menunjukan konkurensi titik Gergonne dengan menggunakan lingkaran kosentrik [7], dapat dilihat dengan mengkontruksi lingkaran kosentrik dari lingkaran dalam segitiga dengan *incenter* sebagai titik pusat kedua lingkaran tersebut. Sehingga dapat dibentuk segitiga yang sebangun terhadap segitiga asalnya. Perhatikan Gambar 5.



Gambar 5. $D(I)$ Sebagai lingkaran dalam ΔDEF .

Perhatikan ΔABC dan ΔDEF , misalkan panjang $BA' = v_1, A'C = v_2, B'A = v_3$ dan misalkan panjang $ED' = w_1, D'F = w_2, E'D = w_3$ dan $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. Untuk mempermudah menghitung panjang BA', maka diberikan Gambar 6 sebagai berikut.



Gambar 6. Gambaran untuk menghitung BA'.

Perhatikan Gambar 6, misalkan $D'X = t$ maka $D'I = r + t$ sehingga perbandingan panjang jai-jarinya adalah $(r+t):r$ dan diperoleh

$$w_1 = \left(\frac{r+t}{r}\right)v_1 \tag{16}$$

karena $PD' = w_1 - BP$ maka diperoleh

$$PD' = w_1 - t(cosec\ \theta_1), \tag{17}$$

karena panjang $EP = BP$ maka

$$EP = t(cosec\,\theta_1) \tag{18}$$

untuk mempermudah proses penghitungan misalkan

$$m_1 = (cosec\,\theta_1),$$

maka diperoleh

$$PD' = w_1 - t\,m_1 \tag{19}$$

karena $\Delta PAD' \sim \Delta BAA'$ maka diperoleh

$$BA' = \frac{(v_1 + v_3)PD'}{v_1 + v_3 + t\,m_1}. \tag{20}$$

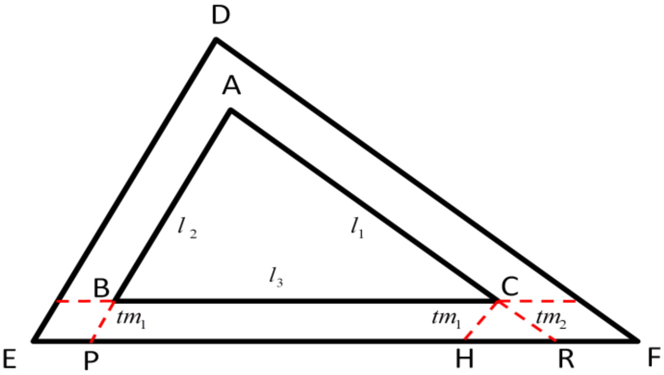
Subsitusikan persamaan (16), (17), (18) dan (19) ke persamaan (20),

$$BA' = \frac{(v_1 + v_3)\left[\left((r+t)/r\right)v_1 - t\,m_1\right]}{v_1 + v_3 + t\,m_1}, \tag{21}$$

dengan cara yang sama memperoleh BA', maka diperoleh

$$\begin{aligned}
CA' &= \frac{(v_2 + v_3)\left[\left((r+t)/r\right)v_2 - t\,m_2\right]}{v_2 + v_3 + t\,m_2}\\
CB' &= \frac{(v_1 + v_2)\left[\left((r+t)/r\right)v_2 - t\,m_2\right]}{v_1 + v_2 + t\,m_2}\\
AB' &= \frac{(v_1 + v_3)\left[\left((r+t)/r\right)v_3 - t\,m_3\right]}{v_1 + v_3 + t\,m_3}\\
AC' &= \frac{(v_2 + v_3)\left[\left((r+t)/r\right)v_3 - t\,m_3\right]}{v_2 + v_3 + t\,m_3}\\
BC' &= \frac{(v_1 + v_2)\left[\left((r+t)/r\right)v_1 - t\,m_1\right]}{v_1 + v_2 + t\,m_1}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Perhatikan segitiga yang sebangun berikut



Gambar 7. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Perhatikan Gambar 7, dengan memperpanjang garis AC hingga memotong sisi EF di titik R dan bentuk pula garis dari titik C terhadap sisi EF memotong dititik Q

maka terbentuk ΔCHR sehingga $\Delta ABC \sim \Delta CHR$. Selanjutnya perhatikan ΔABC misalkan $AC = l_1$, $AB = l_2$, dan $BC = l_3$ diperoleh,

$$tl_1 m_1 = tl_2 m_2 = tl_3 m_3 = k, \tag{23}$$

dari persamaan (21) dan (23) diperoleh,

$$BA' = \frac{l_2\left[l_1\left(\left(r+t\right)/r\right)v_1 - k\right]}{l_1 l_2 + k} \tag{24}$$

dengan cara yang sama memperoleh panjang sisinya maka diperoleh

$$CA' = \frac{l_1\left[l_2\left(\left(r+t\right)/r\right)v_2 - k\right]}{l_1 l_2 + k} \tag{25}$$

$$CB' = \frac{l_3\left[l_2\left(\left(r+t\right)/r\right)v_2 - k\right]}{l_2 l_3 + k} \tag{26}$$

$$AB' = \frac{l_2\left[l_3\left(\left(r+t\right)/r\right)v_3 - k\right]}{l_2 l_3 + k} \tag{27}$$

$$AC' = \frac{l_1\left[l_3\left(\left(r+t\right)/r\right)v_3 - k\right]}{l_1 l_3 + k} \tag{28}$$

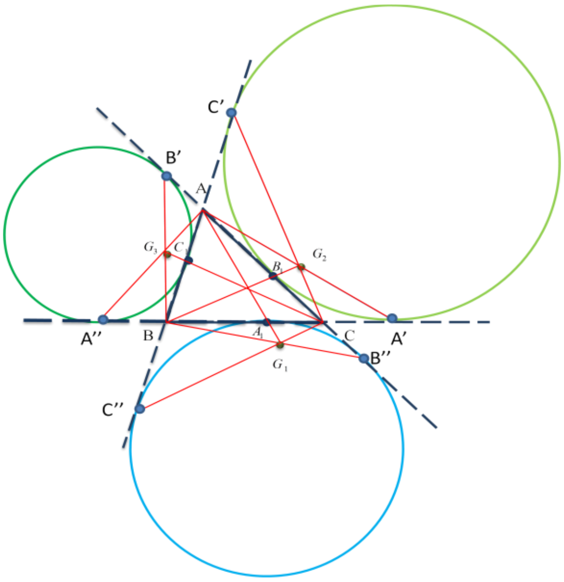
$$BC' = \frac{l_3\left[l_1\left(\left(r+t\right)/r\right)v_1 - k\right]}{l_1 l_3 + k} \tag{29}$$

dengan menggunakan Teorema 1, maka persamaan (25), (26), (27), (28) dan (29) menjadi

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1 \qquad \blacksquare$$

3. TITIK GERGONNE LUAR SEGITIGA

Pada bagian ini dijelaskan tentang konkurensi titik Gergonne yang berada di luar segitiga. Pada sebarang ΔABC yang memuat tiga lingkaran singgung luar, masing-masing menyinggung sisi BC di titik A_1, sisi AC di titik B_1, dan sisi AB di titik C_1. Dari ketiga lingkaran singgung luar tersebut dapat dibentuk titik Gergonne berada di luar segitiga. Bentuk garis dari titik singgung A_1, C'', dan B'' terhadap sudut segitiga di hadapannya, ketiga garis tersebut akan berpotongan pada satu titik Ge_1. Konkurensi titik Ge_1 telah dinyatakan dalam [3].



Gambar 8. Titik Gergonne di luar ΔABC.

Perhatikan Gambar 8, pada lingkaran singgung sisi BC akan ditunjukkan CC'', BB'', dan AGe_1 berpotongan di satu titik atau konkuren, dengan menggunakan teorema Ceva pada kasus dua. Misalkan $BC = a$, $AC = b$, dan $AB = c$, berdasarkan semiperimeter pada segitiga, maka persamaan diperoleh

$$AB'' = s, \tag{30}$$

sehingga diperoleh

$$C''B = BA_1 = s - c \tag{31}$$

$$CB'' = CA_1 = s - b. \tag{32}$$

maka persamaan (30), (31), dan (32) menjadi

$$\frac{AC''}{C''B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB''}{B''A} = \frac{s}{s} \cdot \frac{s-c}{s-c} \cdot \frac{s-b}{s-b}$$

$$\frac{AC''}{C''B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB''}{B''A} = 1.$$

maka terbukti titik Ge_1 dari ΔABC adalah konkuren. Dengan menggunakan cara yang sama juga akan berlaku terhadap pembuktian konkurensi dari Ge_2 dan Ge_3. ■

4. KESIMPULAN

Dari hasil artikel ini dapat disimpulkan bahwa terdapat dua jenis titik Gergonne yaitu titik Gergonne yang berada di dalam segitiga dan titik Gergonne yang berada di luar segitiga. Konkurensi titik Gergonne di dalam segitiga dapat dibuktikan dengan berbagai cara dan cara yang lebih dominan digunakan adalah menggunakan teorema garis singgung. Sedangkan konkurensi titik Gergonne yang berada pada luar segitiga lebih mudah ditunjukkan menggunakan semiperimeter segitiga.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Down Jr., F. L. 1964. *Geometry*. Addison-Wesley Publishing Company. INC., Reading.

[2] Godfray, C & A.W. Siddons. 1908. *Modern Geometry*. Cambridge at University Press. London.

[3] Gogeometry. 1 hal. http://www.gogeometry.com/geometry/p682_triangle_Gergonne_points_excircle_tangency_point_concurrent.htm. 20 November 2013. pk. 08.00.

[4] Gutierrez, A. Gergonne Point. 1 hal. Gogeometry.com/center/gergonne-point-theorem-html-ipad-nexus.htm. 19 Desember 2013. pk. 15.00.

[5] Gutierrez, A. Semiperimeter and Incircle. 1 hal. Agute.homestead.com/files/semiperimeterincircle1.htm. 19 Desember 2013. pk. 17.00.

[6] Hoskins, A & Crystal Martin. Essay 2: Gergonne Point. 4 hal. http://jwilson.coe.uga.edu/EMT668/EMAT6680.F99/Martin/essays/essay2.html, 12 September 2013. pk. 11.25.

[7] J.N Boyd & P.N. Raychowdhury. 1999. The Gergonne Point Generalized Through Convex Coordinates, *Internet. J. Math. Sci*, **22** (2): 423-430.

[8] Mashadi. 2012. *Geometry*. Pusbangdik. Universitas Riau, Pekanbaru.