HUBUNGAN SEGITIGA NAGEL DENGAN SEGITIGA ASALNYA

Reni Widya[1*], Hasriati[2], M. Natsir[2]

[1]Mahasiswa Program S1 Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Univeritas Riau
Kampus Bina Widya 28293 Indonesia

*Reni.widya19@yahoo.co.id

ABSTRACT

This paper discusses the relationship between the Nagel triangle and the original triangle. The Nagel triangle is formed by connecting the three of tangent points of the excircle to the sides of the triangle. This relationship can be shown through the collinearity of centroid and incenter of the original triangle to Nagel point of the Nagel triangle. Then, the relationship between the area of the Nagel triangle and the area of the original triangle is shown.

Keywords: *centroid, collinearity, excircle, Nagel triangle, incenter*

ABSTRAK

Artikel ini membahas hubungan segitiga Nagel dengan segitiga asal. Segitiga Nagel terbentuk dari menghubungkan ketiga titik singgung lingkaran singgung luar pada sisi-sisi segitiga. Hubungan ini ditunjukkan melalui kolinieritas titik centroid dan incenter pada segitiga asal terhadap titik Nagel pada segitiga Nagel. Kemudian ditunjukkan hubungan antara luas segitiga Nagel dengan luas segitiga asal.

Kata kunci: *centroid, incenter,* kolinieritas, lingkaran singgung luar, segitiga Nagel

1. PENDAHULUAN

Misalkan terdapat sebarang ΔABC atau dikatakan sebagai segitiga asal memuat banyak titik perpotongan garis (konkuren) yang terbentuk dari garis-garis yang ditarik dari masing-masing titik sudut segitiga ke sisi-sisi dihadapannya diantaranya adalah garis yang membagi sisi dihadapannya sama panjang atau garis berat segitiga yang disebut *centroid* [2], dan garis yang membagi sudut segitiga sama besar (bisektor sudut) yang disebut *incenter* [3, h. 139].

Selanjutnya pada sebarang ΔABC memiliki tiga lingkaran singgung luar. Jika dihubungkan ketiga titik sudut segitiga terhadap titik singgung dihadapannya, maka ketiga garis berpotongan di titik Nagel [5]. Kemudian dari ketiga titik singgung tersebut membentuk sebuah segitiga yang disebut segitiga Nagel (*Nagel triangle*). Artikel ini membahas hubungan segitiga Nagel dengan segitiga asalnya. Untuk memperoleh hubungan tersebut ditunjukkan titik *centroid* dan *incenter* pada segitiga asal segaris (kolinier) dengan titik Nagel pada segitiga Nagel dengan menggunakan

Teorema Menelaus [3, h. 255]. Hubungan lain diperoleh dari perhitungan luas segitiga Nagel. Mario Dalc'in [1] telah membahas bagaimana menentukan luas segitiga Nagel dengan menggunakan koordinat barisentrik. Pada artikel ini, penulis menentukan luas segitiga Nagel berdasarkan luas segitiga asal yang memuat segitiga Nagel.

2. KOLINIERITAS SEGMEN NAGEL

Pada sebarang ΔABC memuat tiga lingkaran singgung luar [8, h. 154], masing-masing menyinggung sisi BC di titik N_A, kemudian sisi AC di titik N_B dan pada sisi AB di titik N_C. Jika dihubungkan ketiga sudut segitiga terhadap titik singgung N_A, N_B dan N_C sehingga membentuk tiga garis AN_A, BN_B dan CN_C yang berpotongan di satu titik yaitu titik Nagel (*Nagel point*) [4]. Untuk membuktikan kekonkurenan titik Nagel dapat digunakan Teorema sebagai berikut.

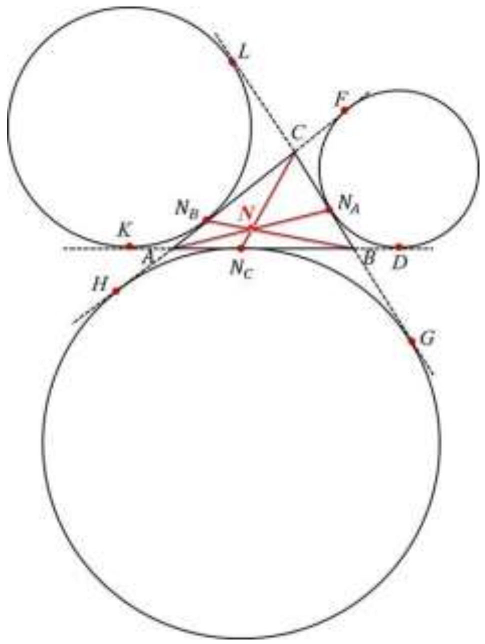
Teorema 1. (Teorema Ceva) Jika D, E, dan F masing-masing adalah titik pada sisi BC, AC, dan AB pada ΔABC. Maka garis AD, BE, dan CF adalah konkuren (berpotongan di satu titik) jika dan hanya jika

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1 \tag{1}$$

Bukti Teorema Ceva dibahas pada [3, h. 238]

Teorema 2. (Teorema Nagel) Jika ketiga titik sudut segitiga dihubungkan terhadap titik singgung lingkaran singgung luar di hadapannya, maka ketiga garis tersebut konkuren di titik Nagel.

Bukti: Perhatikan Gambar 1, misalkan titik N_A, N_B, dan N_C merupakan titik-titik yang menyinggung lingkaran singgung luar ΔABC masing-masing menyinggung sisi BC, CA dan AB.



Gambar 1. Garis AN_A, BN_B, dan CN_C konkuren di titik N (Nagel).

Untuk garis singgung *BD* dan *CF*, diperoleh

$$DB = BN_A = s - c, \tag{2}$$

$$FC = N_AC = s - b. \tag{3}$$

Dengan cara yang sama untuk garis singgung *CL* dan *AK*, diperoleh

$$CL = CN_B = s - a, \tag{4}$$

$$AK = N_BA = s - c, \tag{5}$$

dan untuk garis singgung *AH* dan *BG*, juga diperoleh

$$AH = AN_C = s - b, \tag{6}$$

$$BG = N_CB = s - a. \tag{7}$$

Berdasarkan Teorema 1 maka diperoleh:

$$\frac{AN_C}{N_CB} \cdot \frac{BN_A}{N_AC} \cdot \frac{CN_B}{N_BA} = \frac{(s-b)}{(s-a)} \cdot \frac{(s-c)}{(s-b)} \cdot \frac{(s-a)}{(s-c)} = 1, \tag{8}$$

maka ketiga garis AN_A, BN_B, dan CN_C konkuren di titik Nagel (*N*). ■

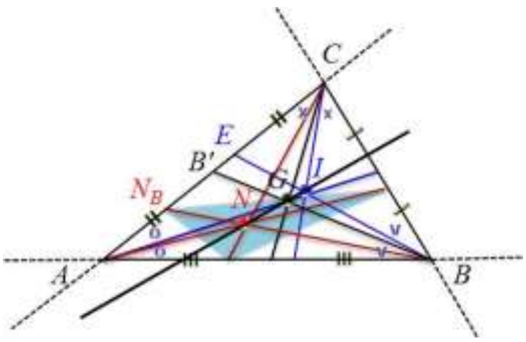
Selanjutnya, dibahas mengenai kolinieritas segmen Nagel yaitu membuktikan titik *centroid* (*G*), *incenter* (*I*) dan Nagel (*N*) adalah segaris (kolinier) atau merupakan Segmen Nagel [5]. Untuk menunjukkan beberapa titik segaris dapat menggunakan Teorema Menelaus [3].

Teorema 3. (Teorema Menelaus) Diketahui sebuah Δ*ABC*, *X* pada *BC*, *Y* pada *CA* dan *Z* pada *AB*. Maka titik *X*, *Y*, *Z* adalah segaris jika hanya jika

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = -1. \tag{9}$$

Bukti Teorema Menelaus dibahas pada [3, h. 255]

Selanjutnya, dibuktikan titik *centroid*, *incenter* dan Nagel segaris (kolinier) menggunakan Teorema Menelaus. Perhatikan Gambar 2

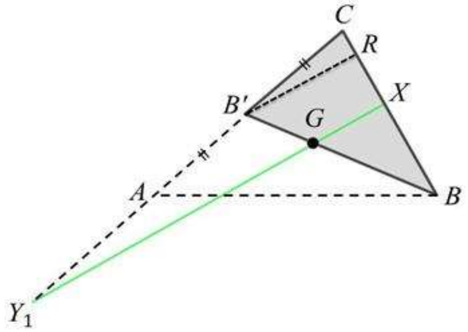


Gambar 2. Titik *centroid* (*G*), *incenter* (*I*), dan Nagel (*N*) segaris (kolinier).

Pada Δ*ABC*, jika *BB'* merupakan *cevian* dari titik *centroid* (*G*), *BE* merupakan *cevian* dari titik *incenter* (*I*), dan BN_B merupakan *cevian* dari titik Nagel (*N*). Dari gambar 2, Δ*ABC* memuat titik *centroid*, *incenter*, dan Nagel.

Untuk membuktikan ketiga titik tersebut segaris, maka

1. Perhatikan $\Delta BB'C$ pada Gambar 3.



Gambar 3. Titik *centroid (G)* pada ΔABC.

Tarik garis dari sisi BC di titik X, sehingga berpotongan dengan perpanjangan sisi CA di titik Y_1, maka X terletak pada sisi BC, G pada sisi BB', dan Y_1 pada sisi CA. Akan ditunjukkan titik X, G, dan Y_1 adalah segaris. Misalkan titik R pada BC dan $RB' \,//\, XY_1$, maka pada ΔBXG dan $\Delta BRB'$ diperoleh

$$\angle XBG = \angle CBB' \qquad \text{(sudut yang sama)}$$

$$\angle BXG = \angle BRB' \qquad (RB' \,//\, XY_1),$$

sehingga $\Delta BXG \sim \Delta BRB'$, mengakibatkan

$$\frac{BG}{GB'} = \frac{BX}{XR}. \tag{10}$$

Dengan cara yang sama $\Delta B'CR \sim \Delta Y_1CX$, juga diperoleh

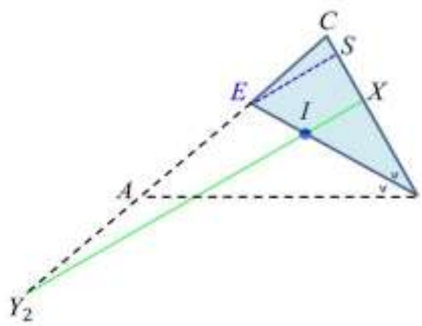
$$\frac{B'Y_1}{Y_1C} = \frac{XR}{XC}. \tag{11}$$

Dari persamaan (10) dan (11) diperoleh

$$\frac{BG}{GB'} \cdot \frac{B'Y_1}{Y_1C} \cdot \frac{XC}{BX} = \frac{BX}{XR} \cdot \frac{XR}{XC} \cdot \frac{XC}{BX} = \text{-1}. \tag{12}$$

Berdasarkan Teorema 3, maka titik X, G, dan Y_1 segaris.

2. Perhatikan ΔBEC pada Gambar 4.



Gambar 4. Titik *Incenter (I)* pada ΔABC.

Tarik garis dari sisi BC di titik X, sehingga berpotongan dengan perpanjangan sisi CA di titik Y_2, maka X terletak pada sisi BC, I pada sisi BE, dan Y_2 pada sisi CA. Akan ditunjukkan titik X, I, dan Y_2 adalah segaris. Misalkan titik S pada BC dan $SE \parallel XY_2$, maka pada ΔBXI dan ΔBSE diperoleh

$$\angle XBI = \angle SBE \qquad \text{(sudut yang sama)}$$

$$\angle BXI = \angle BSE \qquad (SE \parallel XY_2),$$

sehingga $\Delta BXI \sim \Delta BSE$, mengakibatkan

$$\frac{BI}{IE} = \frac{BX}{XS}. \tag{13}$$

Dengan cara yang sama $\Delta ECS \sim \Delta Y_2CX$, juga diperoleh

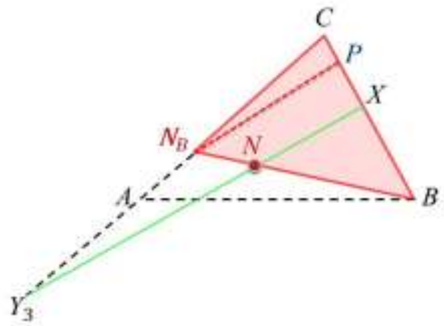
$$\frac{EY_2}{Y_2C} = \frac{XS}{XC}. \tag{14}$$

Dari persamaan (13) dan (14) diperoleh

$$\frac{BI}{IE} \cdot \frac{EY_2}{Y_2C} \cdot \frac{XC}{BX} = \frac{BX}{XS} \cdot \frac{SX}{XC} \cdot \frac{XC}{BX} = -1. \tag{15}$$

Berdasarkan Teorema 3, , maka titik X, I, dan Y_2 segaris.

3. Perhatikan ΔBN_BC pada Gambar 5.



Gambar 5. Titik Nagel *(N)* pada ΔABC.

Tarik garis dari sisi BC di titik X, sehingga berpotongan dengan perpanjangan sisi CA di titik Y_3, maka X terletak pada sisi BC, N pada sisi BN_B, dan Y_3 pada sisi CA. Akan ditunjukkan titik X, N, dan Y_3 adalah segaris. Misalkan titik P pada BC dan $PN_B \parallel XY_3$, maka pada ΔBXN dan ΔBPN_B diperoleh

$$\angle XBN = \angle PBN_B \qquad \text{(sudut yang sama),}$$

$$\angle BXN = \angle BPN_B \qquad (PN_B \parallel XY_3),$$

sehingga $\Delta BXN \sim \Delta BPN_B$, mengakibatkan

$$\frac{BN}{NN_B} = \frac{BX}{XP}. \tag{16}$$

Dengan cara yang sama $\Delta N_BCP \sim \Delta Y_3CX$, juga diperoleh

$$\frac{N_BY_3}{Y_3C} = \frac{XP}{XC}. \tag{17}$$

Dari persamaan (16) dan (17), diperoleh

$$\frac{BN}{NN_B}\cdot\frac{N_BY_3}{Y_3C}\cdot\frac{XC}{BX}=\frac{BX}{XP}\cdot\frac{XP}{XC}\cdot\frac{XC}{BX}=-1. \qquad (18)$$

Berdasarkan persamaan , maka ketiga titik X, N, dan Y_3 adalah segaris.

Dari persamaan (12), (15), dan (18), diperoleh titik X, G, Y_1 segaris, X, I, Y_2 segaris, dan X, N, Y_3 segaris. Untuk membuktikan titik $G, I,$ dan N juga segaris, maka akan ditunjukkan $Y_1 = Y_2 = Y_3$. Dari persamaan (12) dan (15), diperoleh perbandingan sisinya

$$\frac{BG}{GB'}\cdot\frac{B'Y_1}{Y_1C}\cdot\frac{XC}{BX}=\frac{BI}{IE}\cdot\frac{EY_2}{Y_2C}\cdot\frac{XC}{BX}, \qquad (19)$$

karena

$$B'Y_1 = (CA + AY_1) \qquad (20)$$

$$CA = (B'Y_1 - AY_1) + CB', \qquad (21)$$

dan

$$Y_1C = CA + AY_1 \qquad (22)$$

$$CA = Y_1C - AY_1, \qquad (23)$$

kemudian

$$EY_2 = (CA + AY_2) - CE \qquad (24)$$

$$CA = (EY_2 - AY_2) + CE \qquad (25)$$

dan

$$Y_2C = CA + AY_2 \qquad (26)$$

$$CA = Y_2C - AY_2. \qquad (27)$$

Berdasarkan persamaan (20), (21), (22), (23), (24), (25), (26), dan (27), persamaan (19) menjadi

$$\frac{BG}{GB'}\cdot\frac{(B'Y_1 - AY_1) + CB'}{Y_1C - AY_1}\cdot\frac{XC}{BX}=\frac{BI}{IE}\cdot\frac{(EY_2 - AY_2) + CE}{Y_2C - AY_2}\cdot\frac{XC}{BX}$$

atau

$$\frac{BG}{GB'}\cdot\frac{CA}{CA}\cdot\frac{XC}{BX}=\frac{BI}{IE}\cdot\frac{CA}{CA}\cdot\frac{XC}{BX}. \qquad (28)$$

Dari persamaan (28), karena B' dan E berada pada garis yang sama, maka haruslah G dan I juga berada pada garis yang sama, artinya $XY_1 = XY_2$.

Dengan cara yang sama untuk persamaan (15) dan (18), perbandingan sisi dari kedua persamaan tersebut menjadi

$$\frac{BI}{IE}\cdot\frac{(EY_2 - AY_2) + CE}{Y_2C - AY_2}\cdot\frac{XC}{BX}=\frac{BN}{NN_B}\cdot\frac{(N_BY_3 - AY_3) + CN_B}{Y_3C - AY_3}\cdot\frac{XC}{BX}$$

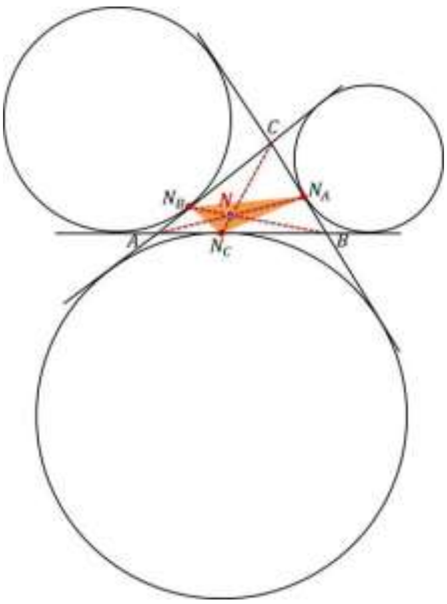
atau

$$\frac{BI}{IE}\cdot\frac{CA}{CA}\cdot\frac{XC}{BX}=\frac{BN}{NN_B}\cdot\frac{CA}{CA}\cdot\frac{XC}{BX}. \tag{29}$$

Dari persamaan (29), karena E dan N_B berada pada garis yang sama, maka haruslah I dan N juga berada pada garis yang sama, artinya $XY_2 = XY_3$. Berdasarkan persamaan (28) dan (29), Karena G dan I berada pada garis $XY_1 = XY_2$, kemudian I dan N berada pada garis $XY_2 = XY_3$, dengan kata lain G, I, dan N adalah segaris. Hubungan yang diperoleh dari pembuktian ini adalah titik-titik konkurensi pada segitiga asal seperti titik *centroid* dan *incenter* segaris dengan titik konkurensi pada segitiga Nagel yaitu titik Nagel atau ketiga titik tersebut merupakan segmen Nagel [5].

3. LUAS SEGITIGA NAGEL

Pada Gambar 1, dari titik singgung N_A, N_B, dan N_C, jika dihubungkan akan membentuk sebuah segitiga yaitu $\Delta N_A N_B N_C$ atau disebut dengan segitiga Nagel [5]. Segitiga Nagel disebut dengan segitiga singgung luar atau *Extouch Triangle*. Perhatikan Gambar 6.



Gambar 6. $\Delta N_A N_B N_C$ atau segitiga Nagel.

Dalam artikel ini, penulis menentukan luas segitiga Nagel berdasarkan hubungan segitiga asal ΔABC yang memuat segitiga Nagel dengan mengurangi $L\Delta ABC$ dengan $L\Delta AN_CN_B$, $L\Delta N_CBN_A$, dan $L\Delta N_ACN_B$.

Misalkan

$$x=\frac{BN_A}{BC}, \tag{30}$$

$$x' = \frac{N_A C}{BC}, \tag{31}$$

$$y = \frac{CN_B}{AC}, \tag{32}$$

$$y' = \frac{N_B A}{AC}, \tag{33}$$

$$z = \frac{AN_C}{AB}, \tag{34}$$

$$z' = \frac{N_C B}{AB}, \tag{35}$$

dengan menjumlahkan persamaan (30) dan (31), diperoleh

$$x + x' = \frac{BN_A}{BC} + \frac{N_A C}{BC}$$

$$x + x' = 1. \tag{36}$$

Dengan cara yang sama untuk persamaan (32), (33), (34) dan (35) juga diperoleh

$$y + y' = 1, \tag{37}$$

$$z + z' = 1. \tag{38}$$

Dari ΔABC berlaku

$$\sin\angle A = \frac{2\, L\Delta ABC}{AB \cdot AC}. \tag{39}$$

Pada $\Delta AN_C N_B$ juga berlaku

$$L\Delta AN_C N_B = \frac{1}{2} \cdot N_A C \cdot N_B A \ \sin\angle A. \tag{40}$$

Substitusi persamaan (39) ke persamaan (40) menjadi

$$L\Delta AN_C N_B = \frac{N_A C}{AB} \cdot \frac{N_B A}{AC} \cdot L\Delta ABC. \tag{41}$$

Kemudian, substitusi persamaan (34) dan (33) ke persamaan (41) diperoleh

$$L\Delta AN_C N_B = z \cdot y' \,(L\Delta ABC). \tag{42}$$

Dengan cara yang sama terhadap sin $\angle B$ dan sin $\angle C$, diperoleh

$$L\Delta N_C BN_A = \frac{N_C B}{AB} \cdot \frac{BN_A}{BC} \cdot L\Delta ABC$$

$$L\Delta N_C BN_A = z' \cdot x \,(L\Delta ABC) \tag{43}$$

dan

$$L\Delta N_B N_A C = \frac{CN_B}{AC} \cdot \frac{N_A C}{BC} \cdot L\Delta ABC$$

$$L\Delta N_B N_A C = y \cdot x' \,(L\Delta ABC). \tag{44}$$

Dari Gambar 20, $L\Delta N_A N_B N_C$ dapat dinyatakan

$$L\Delta N_A N_B N_C = L\Delta ABC - (L\Delta AN_C N_B + L\Delta N_C BN_A + L\Delta N_B N_A) \tag{45}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (42), (43), (44) ke persamaan (45) sehingga diperoleh

$$L\Delta N_A N_B N_C = L\Delta ABC - (z \cdot y' \,(L\Delta ABC) + z' \cdot x \,(L\Delta ABC) + y \cdot x' \,(L\Delta ABC)$$

$$L\Delta N_A N_B N_C = L\Delta ABC \;[1 - (z \cdot y') - (z' \cdot x) - (y \cdot x')]$$

$$\frac{L\Delta N_A N_B N_C}{L\Delta ABC} = 1 - (z \cdot y') - (z' \cdot x) - (y \cdot x')$$

$$= 1 - \left(\frac{z\,y'}{(z+z')(y+y')} + \frac{z'x}{(z+z')(x+x')} + \frac{y\,x'}{(y+y')(x+x')}\right)$$

$$\frac{L\Delta N_A N_B N_C}{L\Delta ABC} = \frac{(x+x')(y+y')(z+z')}{(x+x')(y+y')(z+z')} - \frac{z\,y'\,x + z\,y'\,x' + z'\,x\,y + z'\,x\,y' + y\,x'\,z + y\,x'\,z'}{(x+x')(y+y')(z+z')}$$

$$\frac{L\Delta N_A N_B N_C}{L\Delta ABC} = \frac{x\,y\,z + x\,y\,z' + x\,y'\,z + xy'\,z' + x'\,y\,z + x'\,y\,z' + x'\,y'\,z + x'\,y'\,z'}{(x+x')(y+y')(z+z')} - \frac{z\,y'\,x + z\,y'\,x' + z'\,x\,y + z'\,x\,y' + y\,x'\,z + y\,x'\,z'}{(x+x')(y+y')(z+z')}$$

$$\frac{L\Delta N_A N_B N_C}{L\Delta ABC} = \frac{x\,y\,z + x'\,y'\,z'}{(x+x')(y+y')(z+z')} \tag{46}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (36), (37), dan (38), ke persamaan (46) diperoleh

$$\frac{L\Delta N_A N_B N_C}{L\Delta ABC} = x\,y\,z + x'\,y'\,z'. \tag{47}$$

Kemudian substitusi persamaan (30), (31), (32), (33), (34), dan (35) ke persamaan (47) diperoleh

$$\frac{L\Delta N_A N_B N_C}{L\Delta ABC} = \left(\frac{BN_A}{BC} \cdot \frac{CN_B}{AC} \cdot \frac{AN_C}{AB}\right) + \left(\frac{N_A C}{BC} \cdot \frac{N_B A}{AC} \cdot \frac{N_C B}{AB}\right)$$

$$\frac{L\Delta N_A N_B N_C}{L\Delta ABC} = \left(\frac{s-c}{a} \cdot \frac{s-a}{b} \cdot \frac{s-b}{c}\right) + \left(\frac{s-b}{a} \cdot \frac{s-c}{b} \cdot \frac{s-a}{c}\right)$$

$$\frac{L\Delta N_A N_B N_C}{L\Delta ABC} = \left(\frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}\right)$$

$$L\Delta N_A N_B N_C = \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}\ L\Delta ABC \qquad (48)$$

4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang dikemukakan pada artikel ini dapat disimpulkan bahwa hubungan segitiga Nagel dengan segitiga asalnya dapat diperoleh dengan membuktikan titik *centroid* dan *incenter* pada segitiga asal segaris (kolinier) dengan titik Nagel pada segitiga Nagel. Kemudian hubungan lain diperoleh dari perhitungan luas segitiga Nagel yang memuat segitiga Nagel, dapat dilihat pada persamaan (45) luas segitiga Nagel diperoleh dengan mengurangi $L\Delta ABC$ dengan $L\Delta AN_CN_B$, $L\Delta N_CBN_A$, dan $L\Delta N_ACN_B$ dan hasil yang diperoleh pada persamaan (48), yaitu luas segitiga Nagel dengan segitiga asal berbanding lurus artinya semakin besar luas segitiga asal maka semakin besar luas segitiga Nagel.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Dalc'in, M. 2003. Isotomic Inscribed Triangles and Their Residuals. *Forum Geometricorum*, **3**:125-134.

[2] Down, Jr. F. L. 1964. *Geometry*. Addison-Wesley Publishing Company, INC. Boston.

[3] Mashadi. 2013. *Geometri*. Pusbangdik Universitas Riau. Pekanbaru

[4] Odehnal, B. 2010. Generalized Gergonne and Nagel Points. *Beitr. Algebra Geom*, **51**(2): 477-491.

[5] Weisstein, E. W. 2014. Nagel Point. 1 hal. http://mathworld.wolfram.com/NagelPoint.html diakses pada 15 Desember 2013