MOMEN AKUMULASI DARI SUATU ANUITAS AWAL DENGAN TINGKAT BUNGA ACAK

Ari Fatmawati[1*], Johannes Kho[2], Aziskhan[2]

[1]Mahasiswa Program S1 Matematika
[2]Dosen JurusanMatematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Bina Widya 28293 Indonesia

[*]ari_fatmawati09@yahoo.com

ABSTRACT

This article discusses the three moments formed from the accumulation of due annuity with random interest rate. The highest moment of these three moments is obtained by first determining the previous two moments. Moment accumulation is used to predict the accumulation of profits expected by investors from an investment made during n periods.

Keywords: *random interest rate, expectation value and variance, moments of the accumulation of due annuity.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas tentang tiga momen yang dibentuk dari akumulasi suatu anuitas awal dengan menggunakan tingkat bunga acak. Momen tertinggi dari ketiga momen ini diperoleh dengan terlebih dahulu menentukan dua momen sebelumnya. Momen akumulasi digunakan untuk memprediksi akumulasi keuntungan yang diharapkan oleh investor dari suatu investasi yang dilakukan selama n periode.

Kata kunci: *tingkat bunga acak, nilai ekspektasi dan variansi, momen akumulasi anuitas awal.*

1. PENDAHULUAN

Matematika finansial merupakan salah satu ilmu yang membahas tentang permasalahan anuitas. Anuitas adalah sederetan pembayaran berkala $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ yang besarnya sama dan dilakukan pada interval waktu yang sama dibuat dalam tahun t_i, dengan $i = 1,2,3,\ldots,n$. Berdasarkan sistem pembayarannya, anuitas terbagi menjadi dua bentuk yaitu anuitas awal dan anuitas akhir. Pada artikel ini anuitas yang digunakan adalah anuitas awal yang merupakan serangkaian pembayaran yang sama dilakukan diawal periode pembayaran dengan batas waktu yang ditentukan [3, h.49].

Dalam finansial, bunga merupakan salah satu komponen yang penting. Bunga merupakan penghasilan dari modal, yang diperoleh dari sejumlah modal yang diinvestasikan. Besarnya bunga yang diterima dari suatu investasi sangat tergantung pada tingkat bunga yang berlaku. Tingkat bunga secara umum terdiri atas tingkat bunga sederhana dan tingkat bunga majemuk. Masing-masing dari tingkat bunga tersebut mempunyai sifat yaitu tetap dan acak. Pada artikel ini yang digunakan adalah tingkat bunga acak yang mana tingkat bunganya tergantung pada jangka waktu [5]. Besarnya bunga pada tingkat bunga acak ini adalah tidak tetap. Nilai tingkat bunga acak dinyatakan dengan i_t. Nilai tingkat bunga acak bersifat fluktuatif yaitu tingkat bunganya bisa naik, turun, atau naik turun.

Metode momen merupakan suatu metode yang dapat digunakan untuk menaksir suatu parameter yaitu rata-rata dan variansi, seperti rata-rata nilai tingkat bunga yang terjadi setiap periodenya [1, h.124]. Pada artikel ini dijelaskan tiga momen pertama dari akumulasi suatu anuitas awal dengan tingkat bunga acak yang diperoleh dengan melengkapkan langkah-langkah pengerjaan Farmer [2]. Momen akumulasi digunakan untuk memprediksi hasil yang diharapkan oleh investor dari suatu investasi yang dilakukan selama *n* periode [4, h.272].

2. NILAI AKUMULASI ANUITAS AWAL DAN EKSPEKTASI

Nilai akumulasi anuitas awal $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ adalah nilai total sejumlah nilai akumulasi dari anuitas dengan pembayaran yang besarnya sama dilakukan di awal periode [3, h.50]. Nilai akumulasi anuitas dapat digunakan untuk mengevaluasi jumlah uang yang diterima pada masa yang akan datang sebagai hasil dari suatu investasi yang dilakukan pada saat ini.

Karena adanya pembayaran yang sama sebesar *c* selama *n* periode dan dipengaruhi oleh tingkat bunga *i*, sehingga nilai akumulasi dari anuitas awal dinyatakan [3, h.50]

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = c(1+i)^{n} + c(1+i)^{n-1} + \ldots + c(1+i)^{2} + c(1+i)$$

Secara umum materi pendukungnya yaitu ekspektasi yang mencakup peubah acak dan fungsi kepadatan peluang. Peubah acak adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada ruang sampel yang memasangkan suatu bilangan riil dengan setiap unsur yang ada didalamnya. Peubah acak terbagi menjadi dua yaitu peubah acak diskrit dan kontinu. Pada artikel ini, peubah acak yang digunakan adalah peubah acak diskrit, yaitu suatu himpunan yang mengandung titik yang berhingga banyaknya.

Setiap peubah acak diskrit mempunyai peluang masing-masing untuk terjadi. Adapun fungsi yang menyatakan peluang tersebut adalah fungsi kepadatan peluang diskrit, dimana fungsi $f(x)$ yang menyatakan peluang untuk setiap nilai x yang mungkin maka disebut fungsi kepadatan peluang diskrit [1, h.56], dan dinyatakan sebagai berikut

$$f(x) = P(X = x), \quad x = x_1, x_2, x_3, \cdots.$$

Fungsi kepadatan peluang diperlukan untuk memperoleh ekspektasi dari suatu peubah acak. Ekspektasi disebut juga nilai rata-rata tertimbang dari nilai yang mungkin dari peubah acak *X*. Misalkan *X* adalah peubah acak diskrit dengan fungsi kepadatan peluang *f*(*x*), maka menurut [1, h.61] ekspektasi dari (*X*) adalah

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i). \qquad (1)$$

3. MOMEN AKUMULASI DARI SUATU ANUITAS AWAL DENGAN TINGKAT BUNGA ACAK

Tingkat bunga biasanya diasumsikan konstan. Sedangkan sekumpulan pengamatan tingkat bunga dengan asumsi ini tidak realistis. Maka terdapat model statistik untuk menerapkan tingkat bunga yang bersifat acak dalam menentukan momen akumulasi.

Misalkan i_t adalah peubah acak diskrit bebas yang menyatakan tingkat bunga ke-*t* selama *n* periode dan *j* menyatakan tingkat bunga tetap, sehingga berdasarkan [2] nilai rata-rata dapat dinyatakan sebagai berikut

$$E(i_t) = j. \qquad (2)$$

Misalkan terdapat peubah acak $i_1, i_2, i_3, ..., i_t$ dengan *t* adalah periode waktu berdistribusi normal dengan μ menyatakan rata-rata tingkat bunga dan s^2 menyatakan variansi tingkat bunga. Fungsi pembangkit momen untuk distribusi normal berdasarkan [1, h.124] adalah

$$M_i^r(t) = e^{\mu t + \frac{s^2 t^2}{2}}. \qquad (3)$$

Dengan mendiferensialkan persamaan (3), untuk $r = 1$ maka ekspektasi dari tingkat bunga dapat dinyatakan dengan

$$M_i^1(0) = E(i) = \mu. \qquad (4)$$

Kemudian dengan mendiferensialkan persamaan (3), untuk $r = 2$ diperoleh

$$M_i^2(0) = E(i^2) = s^2 + \mu^2. \qquad (5)$$

Dari persamaan (4) dan persamaan (5), maka variansi tingkat bunga dapat dinyatakan dengan

$$\text{var}(i) = E(i^2) - \left(E(i)\right)^2 = s^2. \qquad (6)$$

Sehingga diperoleh deviasi standar sebagai berikut

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\text{var}(i)}. \qquad (7)$$

Akumulasi dari suatu anuitas awal dengan batas waktu n periode menggunakan tingkat bunga acak dinotasikan dengan A_n, maka berdasarkan [4, h.273] dinyatakan sebagai berikut

$$A_n = (1+i_n)(1+A_{n-1}), \quad n = 1,2,3,\cdots. \tag{8}$$

Misalkan r = 1, 2, dan 3 menyatakan momen yang ditentukan yaitu momen pertama, momen kedua, dan momen ketiga dengan n menyatakan batas waktu yang ditentukan dari suatu akumulasi dengan serangkaian pembayaran yang dilakukan. Maka momen akumulasi dari suatu anuitas awal berdasarkan [2] dinyatakan sebagai berikut

$$E(A_n^{\mathrm{r}}) = \mathrm{g}_{\mathrm{r}}(n). \tag{9}$$

Jika persamaan selisih yang berkorespondensi homogen memiliki karakteristik $x - k = 0$ maka menurut [2] solusi umum untuk $g(n)$ adalah

$$g(n) = Ak^n, \quad A = \text{konstanta} \tag{10}$$

a. Momen pertama dari akumulasi suatu anuitas awal

Berdasarkan persamaan (9) maka momen pertama dari akumulasi suatu anuitas awal dapat dinyatakan dengan

$$E(A_n) = \mathrm{g}_1(n).$$

Dengan menerapkan ekspektasi untuk kedua ruas pada persamaan (8), sehingga diperoleh momen pertama dari akumulasi suatu anuitas awal adalah

$$E(A_n) = E[(1+i_n)]E[(1+A_{n-1})]. \tag{11}$$

Berdasarkan persamaan (2) dan (9) sehingga persamaan (11) menjadi

$$g_1(n) = (1+j)(1+g_1(n-1)). \tag{12}$$

Jika $k_1 = 1+j$, maka persamaan (12) menjadi

$$g_1(n) = k_1(1+g_1(n-1))$$
$$g_1(n) - k_1 g_1(n-1) = k_1. \tag{13}$$

Misalkan $g_1(n) = a$, maka persamaan (13) menjadi

$$a = \frac{k_1}{1-k_1}.$$

Karena persamaan (13) merupakan persamaan selisih yang berkorespondensi homogen, sehingga diperoleh solusi umum dari persamaan (13) adalah sebagai berikut

$$g_1(n) = A_1 k_1^n - \frac{k_1}{k_1 - 1}. \tag{14}$$

Untuk menentukan nilai dari konstanta A_1 dimisalkan $g_1(0)=0$, sehingga diperoleh

$$A_1 = \frac{k_1}{k_1 - 1}.$$

Substitusikan nilai A_1 ke persamaan (14), sehingga diperoleh persamaan umum untuk momen pertama dari akumulasi anuitas awal adalah sebagai berikut

$$g_1(n) = \frac{k_1}{k_1-1}k_1^n - \frac{k_1}{k_1-1}$$

$$g_1(n) = \frac{k_1}{k_1-1}(k_1^n - 1). \tag{15}$$

b. Momen kedua dari akumulasi suatu anuitas awal

Berdasarkan persamaan (9) maka momen kedua dari akumulasi suatu anuitas awal dapat dinyatakan dengan

$$E(A_n^2) = \mathrm{g}_2(n).$$

Dengan menerapkan ekspektasi untuk kedua ruas pada persamaan (8), sehingga diperoleh momen kedua dari akumulasi suatu anuitas awal adalah

$$E(A_n^2) = E[(1+i_n)^2]E[(1+A_{n-1})^2]. \tag{16}$$

Berdasarkan persamaan (2), (6), dan (9) sehingga persamaan (16) menjadi

$$g_2(n) = (1+2j+j^2+s^2)\,(1+2g_1(n-1)+g_2(n-1)). \tag{17}$$

Jika $k_2 = 1+2j+j^2+s^2$, maka persamaan (17) menjadi

$$g_2(n) = k_2\,(1+2g_1(n-1)+g_2(n-1))$$

$$g_2(n) - k_2 g_2(n-1) = k_2 + 2k_2 g_1(n-1). \tag{18}$$

Dengan menggunakan hasil dari persamaan umum yang telah diperoleh pada momen pertama yaitu pada persamaan (15), sehingga diperoleh solusi dari persamaan (18) yang merupakan persamaan umum untuk momen kedua dari akumulasi suatu anuitas awal adalah sebagai berikut

$$g_2(n) = \frac{2k_1k_2}{(k_1-1)(k_2-k_1)}(k_2^n - k_1^n) - \frac{k_2}{k_2-1}\left(\frac{2k_1}{k_1-1} - 1\right)(k_2^n - 1). \tag{19}$$

c. Momen ketiga dari akumulasi suatu anuitas awal

Berdasarkan persamaan (9) maka momen ketiga dari akumulasi suatu anuitas awal dapat dinyatakan dengan

$$E(A_n^3) = \mathrm{g}_3(n).$$

Dengan menerapkan ekspektasi untuk kedua ruas pada persamaan (8), sehingga diperoleh momen ketiga dari akumulasi suatu anuitas awal adalah

$$E(A_n^3) = E[(1+i_n)^3]E[(1+A_{n-1})^3]. \tag{20}$$

Berdasarkan persamaan (2), (7), dan (9) sehingga persamaan (20) menjadi

$$g_3(n) = (1+3j+3j^2+j^3+\mathrm{s}^3)\,(1+3g_1(n-1)+3g_2(n-1)+g_3(n-1)). \tag{21}$$

Jika $k_3 = 1+3j+3j^2+j^3+\mathrm{s}^3$, maka persamaan (21) menjadi

$$g_3(n) = k_3\,(1+3g_1(n-1)+3g_2(n-1)+g_3(n-1))$$

$$g_3(n) - k_3 g_3(n-1) = k_3\,(1+3g_1(n-1)+3g_2(n-1)). \tag{22}$$

Dengan menggunakan hasil pada persamaan umum yang telah diperoleh dari dua momen pertama sebelumnya, yaitu pada persamaan (15) dan (19) maka diperoleh solusi dari persamaan (22) yang merupakan persamaan umum untuk momen ketiga dari akumulasi suatu anuitas awal adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} g_3(n) = {} & \frac{k_3}{k_3-1}\left(1-\frac{3k_1}{k_1-1}-\frac{3k_2}{k_2-1}+\frac{6k_1k_2}{(k_1-1)\,(k_2-1)}\right)(k_3^{n-1}) \\ & + \frac{k_3}{(k_3-k_1)}\left(\frac{3k_1}{k_1-1}-\frac{6k_1k_2}{(k_1-1)\,(k_2-1)}\right)(k_3^n-k_1^n) \\ & + \frac{k_3}{(k_3-k_2)}\left(\frac{3k_2}{k_2-1}+\frac{6k_1k_2}{(k_1-1)\,(k_2-k_1)}-\frac{6k_1k_2}{(k_1-1)\,(k_2-1)}\right)(k_3^n-k_2^n). \end{aligned} \tag{23}$$

Pada persamaan (15), (19) dan (23) masing-masing merupakan persamaan umum untuk momen pertama, kedua, dan ketiga. Persamaan umum tersebut digunakan untuk memprediksi hasil dari suatu investasi yang dilakukan selama *n* periode, dengan cara perhitungannya adalah perkalian antara masing-masing momen yang ditentukan dengan besarnya suatu investasi yang dilakukan diawal periode. Jika investor menginginkan untuk menggunakan momen tertinggi yaitu momen ketiga, maka harapan akumulasi yang diperoleh dari suatu investasinya adalah lebih besar, sehingga ketentuan atau syarat yang dikenakan kepada investor dari suatu perusahaan akan lebih banyak dan lebih dibatasi dibandingkan dengan menggunakan dua momen pertama.

Berikut diberikan contoh kasus yang berkaitan dengan penerapan dari momen akumulasi anuitas awal untuk perhitungan besarnya akumulasi atau total dari investasi yang dilakukan oleh investor dengan pembayaran tetap dan dilakukan di awal periode. Misalkan seorang investor ingin menginvestasikan uangnya sebesar Rp. 10.000.000,00 setiap awal tahun di suatu Bank selama 15 tahun, dengan asumsi tingkat bunga berdasarkan tingkat bunga acak untuk setiap tahunnya yaitu 2%, 4%, dan 6% dengan masing-masing tingkat bunga tersebut mempunyai kemungkinan yang sama untuk terjadi. Tentukan tiga momen sekitar rata-rata dan jumlah uang yang diterima investor setelah 15 tahun.

Dari contoh kasus diketahui : i_1= 0,02 ; i_2 = 0,04 ; i_3 = 0,06 .

Karena mempunyai kemungkinan yang sama untuk terjadi, maka

$$f(i_t) = \frac{1}{3}, \text{ untuk } t = 1, 2, \text{dan } 3.$$

Jadi, nilai ekspektasi dari tingkat bunga tahunan adalah

$$j = E(i_t) = \sum_{i=0}^{t} i_t f(i_t) = \frac{1}{3}(0{,}02 + 0{,}04 + 0{,}06) = 0{,}04.$$

Nilai variansi dari tingkat bunga tahunan adalah

$$s^2 = \operatorname{var}(i_t) = E[(i_t - j)^2] = \frac{1}{3}\left((-0{,}02)^2 + 0^2 + (0{,}02)^2\right) = 0{,}00026667$$

Selanjutnya diperoleh nilai deviasi standar yaitu

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\operatorname{var}(i_t)} = \sqrt{0{,}00026667} = 0{,}01633.$$

Selanjutnya untuk menyelesaikan contoh kasus dengan menggunakan tiga momen, dimana c adalah pembayaran tetap, j adalah nilai ekspektasi dari tingkat bunga dan n adalah jangka waktu (periode). Maka penyelesaian dari masing-masing momen yang digunakan oleh investor adalah sebagai berikut.

1. Dengan menggunakan momen pertama yang merupakan bilangan pengali pertama, maka diperoleh akumulasi uang yang diterima investor setelah 15 tahun dengan besar pembayaran Rp. 10.000.000,00. Untuk menentukan akumulasi uang yang diterima oleh investor, maka ditentukan terlebih dahulu nilai dari momen pertama. Dengan menggunakan persamaan (15), dan karena n = 15 tahun, maka diperoleh

   $$g_1(15) = \frac{k_1}{k_1 - 1}(k_1^{15} - 1),$$

   jika $k_1 = 1 + j$, maka

   $$k_1 = 1 + 0{,}04 = 1{,}04.$$

Sehingga diperoleh

$$g_1(15) = \frac{1{,}04}{1{,}04-1}\left((1{,}04)^{15} - 1\right)$$

$$g_1(15) = 20{,}8245311{,}6$$

Karena investor menginvestasikan uangnya sebesar c = Rp. 10.000.000,00 setiap tahun di awal periode, maka diperoleh akumulasi uang yang diterima investor setelah 15 tahun dengan menggunakan momen pertama yang merupakan bilangan pengali pertama adalah sebesar

$$\text{Rp. } 10.000.000{,}00.\, g_1(15) = (\text{Rp. } 10.000.000{,}00)\,(20{,}82453116)$$
$$= \text{Rp. } 208.245.311{,}60.$$

2. Dengan menggunakan momen kedua yang merupakan bilangan pengali kedua, maka diperoleh akumulasi uang yang diterima investor setelah 15 tahun dengan besar pembayaran Rp. 10.000.000,00. Untuk menentukan akumulasi uang yang diterima oleh investor, maka ditentukan terlebih dahulu nilai dari momen kedua.
Dengan menggunakan persamaan (19), dan karena n = 15 tahun maka diperoleh

$$g_2(15) = \frac{2k_1k_2}{(k_1-1)(k_2-k_1)}(k_2^{15} - k_1^{15}) - \frac{k_2}{k_2-1}\left(\frac{2k_1}{k_1-1} - 1\right)(k_2^{15} - 1).$$

Jika $k_2 = 1 + 2j + j^2 + s^2$, maka

$$k_2 = 1 + 2(0{,}04) + (0{,}04)^2 + 0{,}00026667 = 1{,}08187.$$

Sehingga diperoleh

$$g_2(15) = \frac{2(1{,}04)(1{,}08187)}{(1{,}04-1)(1{,}08187-1{,}04)}\left((1{,}08187)^{15} - (1{,}04)^{15}\right)$$
$$- \frac{1{,}08187}{1{,}08187-1}\left(\frac{2(1{,}04)}{1{,}04-1} - 1\right)\left((1{,}08187)^{15} - 1\right)$$

$$g_2(15) = 434{,}3402522$$

Karena investor menginvestasikan uangnya sebesar c = Rp. 10.000.000,00 setiap tahun di awal periode, maka diperoleh akumulasi uang yang diterima investor setelah 15 tahun dengan menggunakan momen kedua yang merupakan bilangan pengali kedua adalah sebesar

$$\text{Rp. } 10.000.000{,}00.\, g_2(15) = (\text{Rp. } 10.000.000{,}00)\,(434{,}3402522)$$
$$= \text{Rp. } 4.343.402.522{,}00.$$

3. Dengan menggunakan momen ketiga yang merupakan bilangan pengali ketiga, maka diperoleh akumulasi uang yang diterima investor setelah 15 tahun dengan besar pembayaran Rp. 10.000.000,00. Untuk menentukan akumulasi uang yang diterima oleh investor, maka ditentukan terlebih dahulu nilai dari momen ketiga. Dengan menggunakan persamaan (23), dan karena n = 15 tahun maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
g_3(15) = {} & \frac{k_3}{k_3-1}\left(1-\frac{3k_1}{k_1-1}-\frac{3k_2}{k_2-1}+\frac{6k_1k_2}{(k_1-1)\,(k_2-1)}\right)(k_3^{15-1}) \\
& +\frac{k_3}{(k_3-k_1)}\left(\frac{3k_1}{k_1-1}-\frac{6k_1k_2}{(k_1-1)\,(k_2-1)}\right)(k_3^{15}-k_1^{15}) \\
& +\frac{k_3}{(k_3-k_2)}\left(\frac{3k_2}{k_2-1}+\frac{6k_1k_2}{(k_1-1)\,(k_2-k_1)}-\frac{6k_1k_2}{(k_1-1)\,(k_2-1)}\right)(k_3^{15}-k_2^{15}).
\end{aligned}
$$

Jika $k_3 = 1+3j+3j^2+j^3+s^3$, maka

$$k_3 = 1+3(0{,}04)+3(0{,}04)^2+(0{,}04)^3+(0{,}01633)^3 = 1{,}12487.$$

Sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
g_3(15) = {} & \frac{1{,}12487}{1{,}12487-1}\left(1-\frac{3(1{,}04)}{1{,}04-1}-\frac{3(1{,}08187)}{1{,}08187-1}+\frac{6(1{,}04)(1{,}08187)}{(1{,}04-1)\,(1{,}08187-1)}\right) \\
& \left((1{,}12487)^{14}\right)+\frac{1{,}12487}{(1{,}12487-1{,}04)}\left(\frac{3(1{,}04)}{1{,}04-1}-\frac{6(1{,}04)(1{,}08187)}{(1{,}04-1)\,(1{,}08187-1)}\right) \\
& \left((1{,}12487)^{15}-(1{,}04)^{15}\right)+\frac{1{,}12487}{(1{,}12487-1{,}08187)}\left(\frac{3(1{,}08187)}{1{,}08187-1}\right. \\
& \left.+\frac{6(1{,}04)(1{,}08187)}{(1{,}04-1)\,(1{,}08187-1{,}04)}-\frac{6(1{,}04)(1{,}08187)}{(1{,}04-1)\,(1{,}08187-1)}\right)\left(\begin{array}{l}(1{,}12487)^{15}\\ -(1{,}08187)^{15}\end{array}\right)
\end{aligned}
$$

$$g_3(15) = 15.198{,}45218$$

Karena investor menginvestasikan uangnya sebesar c = Rp. 10.000.000,00 setiap tahun di awal periode, maka diperoleh akumulasi uang yang diterima investor setelah 15 tahun dengan menggunakan momen ketiga yang merupakan bilangan pengali ketiga adalah sebesar

$$
\begin{aligned}
\text{Rp. } 10.000.000{,}00 \,.\, g_3(15) &= (\text{Rp. } 10.000.000{,}00)\,(15.198{,}45218) \\
&= \text{Rp. } 151.984.521.800{,}00.
\end{aligned}
$$

Pada contoh kasus diperoleh akumulasi uang yang diterima oleh investor berbeda-beda dengan menggunakan masing-masing momen. Akumulasi uang yang diterima oleh investor dengan hasil yang lebih besar adalah dengan menggunakan momen tertinggi, yaitu momen ketiga. Hal ini dikarenakan momen ketiga yang merupakan bilangan pengali ketiga memperoleh nilai yang lebih besar dibandingkan dua momen sebelumnya.

4. KESIMPULAN

Dari hasil yang diperoleh berdasarkan pembahasan yang ada maka momen akumulasi anuitas dengan menggunakan tingkat bunga tetap *j*, akan sama dengan ekspektasi (rata-rata) dengan tingkat bunganya adalah peubah acak bebas i_t, dengan $E(i_t) = j$. Salah satu faktor yang mempengaruhi bahwa dengan menggunakan momen tertinggi yaitu momen ketiga memperoleh hasil prediksi dari suatu akumulasi anuitas awal dengan hasil yang lebih besar dibandingkan hasil prediksi dengan momen-momen sebelumnya, hal ini dikarenakan bahwa untuk memperoleh momen ketiga secara rekursif diperoleh dari dua momen sebelumnya.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Bain, L. J. & M. Engelhardt. 1991. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. Wadsworth Publishing Company, Belmount California.

[2] Farmer, J. 2007. *Moments of the Accumulation of an Annuity under Independent Identically Distributed Interest Rates*. Research Paper No. 2007/04. Division of Economic and Financial Studies. Macquarie University, Sydney.

[3] Kellison, S. G. 1970. *The Theory of Interest*. Richard D. Irwin Inc. Illinois.

[4] McCutcheon, J. J. dan Scott, W. F. 1986. *An Introduction to the Mathematics of Finance*. ISBN 0-434-91224-7. Elsevier Butterworth, Heinemann.

[5] Zaks, A. 2001. Annuities under Random Rate of Interest. *Insurance Mathematics and Economics* **28**: 1-11.