**MEAN SQUARE ERROR TERKECIL DARI KOMBINASI
PENAKSIR RASIO-PRODUK UNTUK RATA-RATA POPULASI
PADA SAMPLING ACAK BERSTRATA**

Rini Kurniati^{1*}, Sigit Sugiarto², Rustam Efendi²

¹Mahasiswa Program S1 Matematika

²Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru, 28293, Indonesia

*rinikurniati89@ymail.com

ABSTRACT

This paper discussed about three the ratio-product estimators for mean population in the stratified random sampling. It is combinations of ratio estimator and product estimator in stratified random sampling. This paper is a review from the paper of Tailor et.al. [*Communications of the Korean Statistical Society* 18:111-118]. The estimators discussed are the combination of ratio-product estimator, combination of ratio-product estimator using coefficient of variation and combination of ratio-product estimator using coefficient of kurtosis. All of estimators are bias estimator. Then the *mean square error (MSE)* of each estimator is evaluated. Furthermore, the *MSE* of each estimator is compared. This comparison shows that the combination of ratio-product estimator is the most efficient, that is with the smallest *MSE*.

Keywords: *bias, coefficient of variation, coefficient of kurtosis, ratio-product estimator, stratified random sampling, mean square error.*

ABSTRAK

Pada artikel ini dibahas tiga penaksir rasio-produk untuk rata-rata populasi pada sampling acak berstrata. Penaksir rasio-produk ini merupakan kombinasi dari penaksir rasio dan penaksir produk pada sampling acak berstrata. Artikel ini merupakan kajian ulang dari artikel Tailor et.al. [*Communications of the Korean Statistical Society* 18:111-118]. Penaksir yang dibahas adalah kombinasi penaksir rasio-produk, kombinasi penaksir rasio-produk menggunakan koefisien variasi dan kombinasi penaksir rasio-produk menggunakan koefisien kurtosis. Ketiga penaksir merupakan penaksir bias, lalu setiap penaksir dicari *MSE*. Selanjutnya, *MSE* dari masing-masing penaksir dibandingkan. Perbandingan ini menunjukkan kombinasi penaksir rasio-produk yang efisien adalah penaksir yang mempunyai *MSE* terkecil.

Kata Kunci: *bias, koefisien variansi, koefisien kurtosis, penaksir rasio-produk, sampling acak Berstrata, mean square error*

1. PENDAHULUAN

Meningkatkan ketelitian penaksir pada sampling acak berstrata, digunakan beberapa metode diantaranya metode penaksir rasio atau metode penaksir produk. Metode penaksir rasio-produk merupakan teknik untuk memperkirakan nilai dari suatu parameter. Dalam metode penaksir rasio-produk, suatu variabel pendukung x_i yang berhubungan dengan suatu variabel y_i yang akan kita teliti diperoleh untuk setiap unit didalam sampel. Dengan mengambil hubungan antara x_i dan y_i , dimana x_i adalah unit dari populasi berkarakter X dan y_i adalah unit dari populasi berkarakter Y . Dalam menaksir rata-rata populasi, suatu variabel pendukung yang diketahui berkorelasi positif dengan variabel yang diteliti digunakan metode penaksir rasio sedangkan, suatu variabel pendukung yang diketahui berkorelasi negatif dengan variabel yang akan diteliti digunakan metode penaksir produk. Berdasarkan gagasan Sisodia dan Dwivedi (1981) dalam memperkirakan rata-rata populasi menggunakan koefisien variasi yang diketahui dari variabel pendukung pada metode penaksir rasio-produk dan Singh (2004) memperkirakan rata-rata populasi menggunakan koefisien kurtosis dari variabel pendukung pada metode penaksir rasio-produk [3]. Jenis penaksir rasio-produk pada sampling acak berstrata yang dibahas pada penelitian ini adalah kombinasi rasio-produk untuk rata-rata populasi pada sampling acak bertstrata, kombinasi penaksir rasio-produk yang berkoefisien variasi untuk rata-rata populasi pada sampling acak berstrata, dan kombinasi penaksir rasio-produk yang berkoefisien kurtosis untuk rata-rata populasi pada sampling acak berstrata [5].

2. SAMPLING ACAK SEDERHANA

Sampling acak sederhana adalah sebuah metode yang digunakan untuk mengambil n unit sampel dari N unit populasi sehingga setiap unit populasi memiliki kesempatan yang sama untuk dipilih menjadi unit sampel. Dalam hal ini pengambilan sampel dilakukan tanpa pengembalian agar karakteristik unit-unit lebih akurat [4].

Probabilitas terpilihnya anggota n dari N unit populasi sebagai unit sampel pada pengambilan pertama yaitu n/N , probabilitas pada pengambilan kedua yaitu $\frac{n-1}{N-1}$ sampai probabilitas pada pengambilan ke- n yaitu $1/N - \frac{n-1}{N}$. Maka probabilitas seluruh n unit-unit tertentu yang terpilih dalam n pengambilan adalah $\binom{N}{n}^{-1}$.

Teorema 2.1 [2: h.29] Apabila sampel berukuran n diambil dari populasi berukuran N yang berkarakter Y , dengan sampling acak sederhana maka variansi rata-rata sampel $\bar{y}$ dinotasikan dengan $V(\bar{y})$ dan dirumuskan sebagai

$$V(\bar{y}) = \frac{S^2}{n} \frac{N-n}{N} = \frac{S^2}{n} (1-f),$$

dengan

$$f = \frac{n}{N} \text{ dan } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2}{N-1}.$$

Teorema 2.2 [2: h.29] Jika y_i, x_i adalah sebuah pasangan yang bervariasi dalam unit dalam populasi dan $\bar{y}, \bar{x}$ adalah rata-rata dari sampel acak sederhana berukuran n , maka kovariansinya adalah

$$\text{Cov}(y, x) = \frac{1-f}{n} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{X}).$$

3. SAMPLING ACAK BERSTRATA

Penarikan sampel acak berstrata adalah suatu metode penarikan sampel, dimana populasi berukuran N distratifikasi menjadi beberapa strata, kemudian sampel diambil secara random berdasarkan setiap strata. Syarat-syarat yang harus dipenuhi untuk dapat menggunakan sampling acak berstrata yaitu, harus ada kriteria yang sesuai yang akan dipergunakan sebagai dasar untuk menstratifikasi populasi ke dalam stratum-stratum, ada data pendahuluan dari populasi mengenai kriteria yang digunakan untuk membuat stratifikasi, dan disesuaikan dengan maksud dan tujuan dari penelitian. Sistem penarikan sampel dalam tiap-tiap stratum dilakukan secara sampling acak sederhana.

Teorema 2.3 [2: h.105] Untuk penarikan sampel acak berstrata, variansi dari $\bar{y}_{st}$ adalah

$$V(\bar{y}_{st}) = \sum_h^k \omega_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h} \frac{S_h^2}{n_h},$$

dengan ω_h merupakan penimbang stratum ke- h .

Bukti dari teorema dapat dilihat pada [2: h.105].

Teorema 2.10 [2:h.29] Jika y_i, x_i adalah sebuah pasangan yang bervariasi ditetapkan pada unit dalam populasi dan $\bar{y}_{st}, \bar{x}_{st}$ adalah rata-rata dari sampel acak berstrata berukuran n , maka kovariansinya dinotasikan dengan

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\bar{y}_{st}, \bar{x}_{st}) &= E(\bar{y}_{st} - \bar{Y})(\bar{x}_{st} - \bar{X}) = E\left(\sum_{h=1}^k \omega_h^2 (y_h - \bar{Y})(x_h - \bar{X})\right) \\ \text{Cov}(\bar{y}_{st}, \bar{x}_{st}) &= E(\bar{y}_{st} - \bar{Y})(\bar{x}_{st} - \bar{X}) = \sum_{h=1}^k \omega_h^2 \gamma_h S_{yxh}. \end{aligned}$$

Bukti dari teorema dapat dilihat pada [2: h.29].

4. KOMBINASI PENAKSIR RASIO DAN PENAKSIR PRODUK PADA SAMPLING ACAK BERSTRATA

Bentuk umum penaksir rasio sampling acak berstrata untuk rata-rata populasi $\bar{Y}_{RST}$ dirumuskan sebagai

$$\bar{Y}_{RST} = \bar{y}_{st} \left(\frac{\bar{X}_{st}}{\bar{x}_{st}} \right),$$

dengan $\bar{x}_{st}$ adalah rata-rata sampel, dan $\bar{X}_{st}$ adalah rata-rata populasi.

Bentuk umum penaksir produk sampling acak berstrata untuk rata-rata populasi $\bar{Y}_{PST}$ dirumuskan sebagai

$$\bar{Y}_{PST} = \bar{y}_{st} \left(\frac{\bar{x}_{st}}{\bar{X}_{st}} \right).$$

Dalam artikel ini dibahas tiga kombinasi penaksir rasio-produk untuk rata-rata populasi pada sampling acak berstrata dengan menggunakan koefisien variasi dan koefisien kurtosis [5], yaitu

$$\hat{\bar{Y}}_{bk1} = \bar{y}_{st} \left[\alpha \left\{ \left(\frac{\bar{X}_{st}}{\bar{x}_{st}} \right) \right\} + (-\alpha) \left\{ \left(\frac{\bar{x}_{st}}{\bar{X}_{st}} \right) \right\} \right], \quad (1)$$

$$\bar{Y}_{bk2} = \bar{y}_{st} \left[\alpha \left(\frac{\sum_{h=1}^k W_h (\bar{X}_h + C_{xh})}{\sum_{h=1}^k W_h \bar{x}_h + C_{xh}} \right) + (-\alpha) \left(\frac{\sum_{h=1}^k W_h \bar{x}_h + C_{xh}}{\sum_{h=1}^k W_h (\bar{X}_h + C_{xh})} \right) \right], \quad (2)$$

$$\bar{Y}_{bk3} = \bar{y}_{st} \left[\alpha \left(\frac{\sum_{h=1}^k W_h (\bar{X}_h + \beta_{2h})}{\sum_{h=1}^k W_h \bar{x}_h + \beta_{2h}} \right) + (-\alpha) \left(\frac{\sum_{h=1}^k W_h \bar{x}_h + \beta_{2h}}{\sum_{h=1}^k W_h (\bar{X}_h + \beta_{2h})} \right) \right], \quad (3)$$

dengan $\hat{\bar{Y}}_{bk1}$ adalah kombinasi penaksir rasio-produk, $\hat{\bar{Y}}_{bk2}$ adalah kombinasi penaksir rasio-produk berkoefisien variasi, dan $\hat{\bar{Y}}_{bk3}$ adalah kombinasi penaksir rasio-produk berkoefisien kurtosis.

Ketiga kombinasi penaksir rasio-produk untuk rata-rata populasi pada sampling acak berstrata merupakan penaksir bias, kemudian ditentukan *Mean Square Error (MSE)*. Berdasarkan ide dari Kadilar dan Cingi [3], penulis membandingkan *MSE* dari masing-masing penaksir untuk memperoleh kombinasi penaksir rasio-produk yang efisien. Penaksir yang memiliki nilai *MSE* terkecil merupakan penaksir yang efisien.

5. BIAS DAN MSE KOMBINASI PENAKSIR RASIO-PRODUK UNTUK RATA-RATA POPULASI PADA SAMPLING ACAK BERSTRATA

Bias dan *MSE* kombinasi penaksir rasio-produk untuk rata-rata populasi pada sampling acak berstrata dari masing-masing penaksir sebagai berikut.

Bias dan *MSE* dari persamaan (1) diperoleh

$$B(\bar{Y}_{bk1}) \approx \frac{1}{\bar{X}} \left(\sum_{h=1}^k W_h^2 \gamma_h (R S_{xh}^2 + (-2\alpha) S_{yxh}) \right), \quad (4)$$

$$MSE(\bar{Y}_{bk1}) \approx \sum_{h=1}^k W_h^2 \gamma_h \left(\sigma_{yh}^2 + 2R(-2\alpha) S_{yxh} + R^2 (-2\alpha)^2 S_{xh}^2 \right), \quad (5)$$

dengan

$$R = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}, \quad \gamma_h = \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right), \quad S_{yh}^2 = \frac{1}{N_h - 1} \sum_{j=1}^{N_h} (y_{hj} - \bar{Y}_h)^2, \quad S_{xh}^2 = \frac{1}{N_h - 1} \sum_{j=1}^{N_h} (x_{hj} - \bar{X}_h)^2 \quad \text{dan}$$

$$S_{yxh} = \frac{1}{N_h - 1} \sum_{j=1}^{N_h} (y_{hj} - \bar{Y}_h)(x_{hj} - \bar{X}_h).$$

Bias dan *MSE* dari persamaan (2) diperoleh

$$B(\bar{Y}_{bk2}) \approx \frac{1}{\bar{X}_{SD}} \left(\sum_{h=1}^k W_h^2 \gamma_h (R_{SD} S_{xh}^2 + (-2\alpha) S_{yxh}) \right) \quad (6)$$

$$MSE(\bar{Y}_{bk2}) \approx \sum_{h=1}^k W_h^2 \gamma_h \left(\sigma_{yh}^2 + 2R_{SD}(-2\alpha) S_{yxh} + R_{SD}^2 (-2\alpha)^2 S_{xh}^2 \right), \quad (7)$$

dengan $R_{SD} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}_{SD}}, \quad \bar{X}_{SD} = \sum_{h=1}^k W_h (\bar{X}_h + C_{xh}).$

Bias dan *MSE* dari persamaan (3) diperoleh

$$B(\bar{Y}_{bk3}) \approx \frac{1}{\bar{X}_{SE}} \left(\sum_{h=1}^k W_h^2 \gamma_h (R_{SE} S_{xh}^2 + (-2\alpha) S_{yxh}) \right) \quad (8)$$

$$MSE(\bar{Y}_{bk3}) \approx \sum_{h=1}^k W_h^2 \gamma_h \left(\sigma_{yh}^2 + 2R_{SE}(-2\alpha) S_{yxh} + R_{SE}^2 (-2\alpha)^2 S_{xh}^2 \right), \quad (9)$$

dengan $R_{SE} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}_{SE}}, \quad \bar{X}_{SE} = \sum_{h=1}^k W_h (\bar{X}_h + \beta_{2h} C_{xh}).$

6. KOMBINASI PENAKSIR RASIO-PRODUK YANG EFISIEN

Selanjutnya akan ditentukan kombinasi penaksir rasio-produk yang efisien diantara ke tiga penaksir rasio yang diajukan, yaitu dengan membandingkan *MSE* dari penaksir $\bar{Y}_{bk1}$, $\bar{Y}_{bk2}$ dan $\bar{Y}_{bk3}$.

1. Perbandingan *MSE* $\bar{Y}_{bk2}$ dengan *MSE* $\bar{Y}_{bk1}$ diperoleh $MSE \bar{Y}_{bk2} < MSE \bar{Y}_{bk1}$ jika

$$\alpha > \frac{1}{2} \quad \text{dan} \quad \sum_{h=1}^k W_h C_{xh} > \frac{\bar{Y} (-2\alpha) S_{xh}^2}{2S_{yxh}} + R - \bar{X}. \quad (10)$$

2. Perbandingan $MSE \bar{Y}_{bk3}$ dengan $MSE \bar{Y}_{bk1}$ diperoleh $MSE \bar{Y}_{bk3} < MSE \bar{Y}_{bk1}$ jika

$$\alpha > \frac{1}{2} \quad \text{dan} \quad \sum_{h=1}^k W_h \beta_{2h} > \frac{\bar{Y}(-2\alpha \sum_{xh}^2 + R - \bar{X})}{2S_{yxh}} \quad (11)$$

3. Perbandingan $MSE \bar{Y}_{bk3}$ dengan $MSE \bar{Y}_{bk2}$ diperoleh $MSE \bar{Y}_{bk3} < MSE \bar{Y}_{bk2}$ jika

$$R_{SE} > R_{SD}$$

dan

$$\alpha > \frac{1}{2} \quad \text{dan} \quad \sum_{h=1}^k W_h (\bar{X}_h + \beta_{2h}) > \frac{\bar{Y}(-2\alpha \sum_{xh}^2 + R - \bar{X})}{2S_{yxh}} + \frac{\bar{Y}}{\sum_{h=1}^k W_h (\bar{X}_h + C_{xh})} - \bar{X} \quad (12)$$

Berdasarkan perbandingan dari masing-masing penaksir, diketahui bahwa penaksir $\bar{Y}_{bk3}$ memiliki nilai MSE yang terkecil, sehingga penaksir $\bar{Y}_{bk3}$ merupakan penaksir yang paling efisien dari penaksir rasio lainnya.

7. CONTOH

Sebagai contoh digunakan data produksi padi di Indonesia pada tahun 2012 [1]. Untuk mengetahui rata-rata produksi padi dengan memanfaatkan informasi tambahan yaitu luasnya tanah yang ditanam padi di tiap-tiap provinsi.

Tabel 1. Luas Panen-Produksi Tanaman Padi pada Tahun 2012 Seluruh Indonesia

No	Provinsi	Luas Panen (Ha)	Produksi (Ton)
1	Aceh	387,803	1,788,738
2	Sumatera Utara	765,099	3,715,514
3	Sumatera barat	476,422	2,368,390
4	Riau	144,015	512,152
5	Jambi	149,369	625,164
6	Sumatera Selatan	769,725	3,295,247
7	Bengkulu	144,448	581,911
8	Lampung	641,876	3,093,422
9	Bangka Belitung	8,057	22,976
10	Kepulauan Riau	382	1,323
11	DKI Jakarta	1,897	11,044
12	Jawa Barat	1,918,799	11,271,861
13	Jawa Tengah	1,773,558	10,232,934
14	DI Yogyakarta	152,912	946,224
15	Jawa Timur	1,975,719	12,198,707
16	Banten	362,636	1,865,893
17	Kalimantan Barat	427,798	1,300,100
18	Kalimantan Tengah	251,787	755,507
19	Bali	149,000	865,553
20	Nusa Tenggara Barat	425,448	2,114,231
21	Nusa Tenggara Timur	200,094	698,566

No	Provinsi	Luas Panen (Ha)	Produksi (Ton)
22	Kalimantan Selatan	496,082	2,086,221
23	Kalimantan Timur	140,689	553,440
24	Sulawesi Utara	126,931	615,062
25	Sulawesi Tengah	229,080	1,024,316
26	Sulawesi Selatan	981,164	5,008,143
27	Sulawesi Tenggara	124,511	516,291
28	Gorontalo	51,164	245,357
29	Sulawesi Barat	103,796	412,620
30	Maluku	20,489	84,271
31	Maluku Utara	17,794	65,686
32	Papua Barat	7,750	30,245
33	Papua	7,149	138,032

Sumber: www.bps.go.id

Dengan menggunakan data pada Tabel 1 akan ditentukan kombinasi penaksir rasio-produk yang efisien untuk menaksir rata-rata produksi padi dengan menggunakan syarat penaksir lebih efisien yang diperoleh sebelumnya. Hal ini secara umum dapat ditunjukkan dengan menghitung *MSE* dari masing-masing penaksir yang diajukan. Sebagai informasi tambahan untuk menaksir variansi produksi padi digunakan luas panen. Untuk menghitung *MSE* dari masing-masing penaksir terlebih dahulu ditentukan nilai yang dibutuhkan. Informasi yang diperoleh dari data luas panen dan produksi tanaman padi dengan menggunakan Microsoft Excel pada Tabel 2.

Tabel 2. Nilai-nilai yang diperlukan untuk membandingkan *MSE*.

h	1	2	3
N_h	18	11	4
n_h	4	3	2
$\bar{X}_h$	575.127,89	273.450,82	20.795,50
$\bar{Y}_h$	3.032.617,06	1.285.436,36	79.558,50
S_{xh}	651.214,82	272.584,10	12.202,80
S_{yh}	3.953.454,26	1.385.495,67	44.965,27
γ_h	0,19	0,41	0,25
W_h^2	0,30	0,01	0,01
C_{xh}	1,10039	0,95044	0,50818
β_{2h}	3,33838	3,89897	3,53609

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai yang diperoleh pada Tabel 2 ke persamaan (10), (11), dan (12) maka diperoleh

(i) $MSE\bar{Y}_{bk2} < MSE\bar{Y}_{bk1}$ jika $2.559017872 > -869360.41$

(ii) $MSE\bar{Y}_{bk3} < MSE\bar{Y}_{bk1}$ jika $4255.927258 > -869360.41$

(iii) $MSE\bar{Y}_{bk3} < MSE\bar{Y}_{bk2}$ jika $873630.1373 > 2.0973$

Selanjutnya nilai MSE dari masing-masing penaksir diberikan pada Tabel 3 berikut.

Tabel 3. Nilai MSE untuk ketiga penaksir

No	Penaksir	MSE
1	$\bar{Y}_{bk1}$	499,609
2	$\bar{Y}_{bk2}$	497,608
3	$\bar{Y}_{bk3}$	496,606

Berdasarkan Tabel 3 dapat dilihat bahwa kombinasi penaksir rasio-produk $\bar{Y}_{bk3}$ memiliki nilai MSE yang terkecil dengan syarat bahwa kondisi lebih efisien dapat dipenuhi.

8. KESIMPULAN

Berdasarkan teorema yang digunakan, kombinasi penaksir rasio-produk berkoefisien variasi $\bar{Y}_{bk2}$ lebih efisien dari kombinasi penaksir rasio-produk sederhana $\bar{Y}_{bk1}$. Untuk kombinasi penaksir rasio-produk berkoefisien kurtosis $\bar{Y}_{bk3}$ lebih efisien dari kombinasi penaksir rasio-produk sederhana $\bar{Y}_{bk1}$. Selanjutnya kombinasi penaksir rasio-produk berkoefisien kurtosis $\bar{Y}_{bk3}$ lebih efisien dari kombinasi penaksir rasio-produk berkoefisien variasi $\bar{Y}_{bk2}$. Dapat disimpulkan bahwa kombinasi penaksir rasio-produk berkoefisien kurtosis $\bar{Y}_{bk3}$ merupakan penaksir yang paling efisien dari kedua kombinasi penaksir rasio-produk lainnya jika syarat terpenuhi.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Badan Pusat Statistik. *Tabel Luas Panen, Produktivitas, Produksi Tanaman Padi Seluruh Provinsi di Indonesia* Available from: http://www.bps.go.id/tmn_pgn. Diakses pada 11 Juni 2013.
- [2] Cochran, W. G. 1991. *Teknik Penarikan Sampel, Edisi ketiga*. Terj. Dari *Sampling Techniques*, oleh Rudiandiyah & E. R Osman. Penerbit Universitas Indonesia, Jakarta.
- [3] Kadilar, C & Cingi, H. 2003. Ratio Estimators in Stratified Random Sampling, *Biometrical Journal* 45:218-225
- [4] Sukhatme, P. V. 1957. *Sampling Theory of Surveys with Applications*. The Indian Council of Agricultural Research, New Delhi.
- [5] Tailor, R., Sharma, B. & Kim, J.M. 2011. A Generalized Ratio-cum-Product of Finite Population Mean in Stratified Random Sampling. *Communications of the Korean Statistical Society* 18:111-118.