

ALTERNATIF KONTRUKSI TITIK NAGEL

Indah Suryani^{1*}, Mashadi², M. Natsir²

¹Mahasiswa Program S1 Matematika

²Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Univeritas Riau
Kampus Bina Widya 28293 Indonesia

*indah.suryani2810@yahoo.com

ABSTRACT

This paper discusses the alternative construction of Nagel point, that is the point formed by intersection of three vertices of a triangle which is connected to the points of tangency of the excircle with the opposite sides. This alternative construction has been shown to pass through the incircle. Then, this paper also discusses about outer Nagel point (semi Nagel point) and prove the concurrence of the Nagel point.

Keywords: *concurrence, excircle, incircle, Nagel point, outer Nagel point*

ABSTRAK

Artikel ini membahas tentang alternatif mengkonstruksi titik Nagel, yaitu titik yang terbentuk dari perpotongan antara ketiga titik sudut pada sebuah segitiga yang dihubungkan dengan titik singgung *excircle* di hadapannya. Alternatif ini ditunjukkan melalui *incircle*. Selanjutnya dibahas juga mengenai titik Nagel yang berada di luar segitiga (semi titik Nagel) dan membuktikan konkurensi dari titik Nagel.

Kata kunci: *excircle, incircle, konkurensi, semi titik Nagel, titik Nagel*.

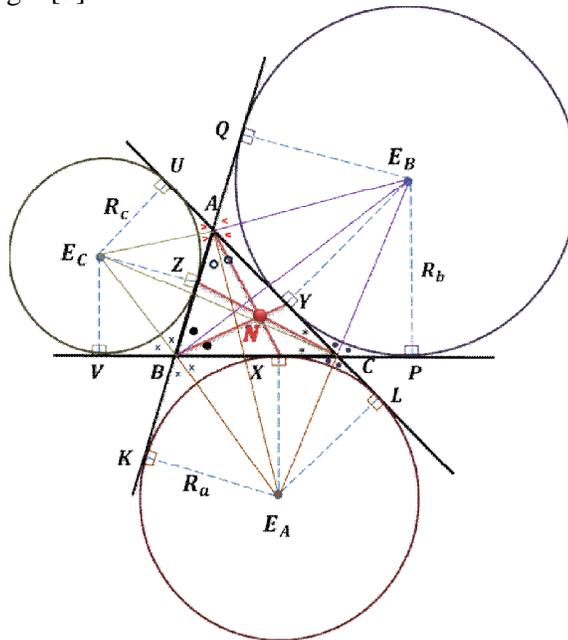
1. PENDAHULUAN

Pada sebarang segitiga dapat dibentuk suatu titik konkurensi [1, h. 481] diantaranya adalah titik *incenter* [1, h. 503] dan titik *excenter* [3]. Masing-masing dari titik ini dapat dibentuk suatu lingkaran, titik *incenter* menghasilkan suatu lingkaran dalam atau dapat juga disebut sebagai (*incircle*) [5, h.150], sedangkan titik *excenter* menghasilkan suatu lingkaran singgung luar (*excircle*) [3]. Selanjutnya, jika terdapat suatu segitiga dengan tiga buah *excircle*, maka dapat dibentuk suatu titik konkurensi lain, yaitu titik Nagel yang merupakan titik konkurensi dari tiga titik sudut pada sebuah segitiga terhadap titik singgung *excircle* segitiga di hadapannya [3,6]. Menurut Hoehn, terdapat alternatif lain yang dapat dilakukan dalam membentuk suatu titik Nagel, alternatif tersebut ialah mengkonstruksi titik Nagel melalui suatu *incircle* [4]. Pada artikel ini penulis mendetailkan alternatif ini, kemudian dibandingkan dengan langkah mengkonstruksi titik Nagel melalui *excircle*, sehingga dari kedua cara tersebut dihasilkan suatu titik Nagel yang sama. Artikel ini juga membahas mengenai keberadaan titik

Nagel di luar segitiga [2] dan membuktikan konkurensi titik Nagel melalui pendekatan teorema Ceva [5, h. 328].

2. MENGGONTRUKSI TITIK NAGEL

Konsep terbentuknya titik Nagel adalah berasal dari *excircle*, dengan demikian akan dibahas terlebih dahulu mengenai mengkontruksi titik Nagel melalui *excircle*. Untuk mengkontruksi titik Nagel melalui *excircle*, perhatikan Gambar 1. Langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut, misalkan pada sebuah sebarang ΔABC disetiap sisi segitiga dibentuk suatu *excircle*, sehingga masing-masing menyinggung di titik X , Y , dan Z . Hubungkan ketiga titik sudut pada segitiga terhadap titik singgung *excircle* di hadapannya, maka ketiga garis tersebut akan konkuren di titik N dan konkurensi ini disebut dengan titik Nagel [3].



Gambar 1. Titik Nagel yang terbentuk melalui *excircle*.

Untuk menunjukkan konkurensi garis pada suatu segitiga, dapat digunakan suatu teorema yaitu sebagai berikut [5, h. 328].

Teorema 1. (Teorema Ceva) Jika D , E , dan F masing-masing adalah titik pada sisi BC , CA , dan AB pada ΔABC . Maka garis AD , BE , dan CF adalah konkuren jika dan hanya jika

$$\frac{AF}{FB} \frac{BD}{DC} \frac{CE}{EA} = 1.$$

Selanjutnya pada Gambar 1, untuk menunjukkan ketiga garis AX , BY , dan CZ konkuren di titik Nagel, terdapat teorema berikut [6].

Teorema 2. Jika setiap titik sudut pada segitiga dihubungkan terhadap titik singgung *excircle* di hadapannya, maka ketiga garis tersebut konkuren di titik Nagel.

Bukti: Perhatikan Gambar 1, misalkan a adalah panjang sisi BC , b panjang sisi AC , dan c panjang sisi AB . Pada *excircle* yang menyinggung sisi CA , terdapat beberapa garis singgung yang memiliki panjang yang sama, yaitu

$$QB = BP = s$$

$$CY = CP = s - a \quad (1)$$

$$YA = AQ = s - c \quad (2)$$

Dengan membandingkan persamaan (1) dan (2), diperoleh

$$\frac{CY}{YA} = \frac{s - a}{s - c} \quad (3)$$

Pada *excircle* yang menyinggung sisi AB , diperoleh

$$CU = VC = s$$

$$AZ = UA = s - b \quad (4)$$

$$ZB = BV = s - a \quad (5)$$

Dengan membandingkan persamaan (4) dan (5), diperoleh

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{s - b}{s - a} \quad (6)$$

Sedangkan pada *excircle* yang menyinggung sisi BC , diperoleh

$$AK = LA = s$$

$$BX = KB = s - c \quad (7)$$

$$XC = CL = s - b \quad (8)$$

Dengan membandingkan persamaan (7) dan (8), diperoleh

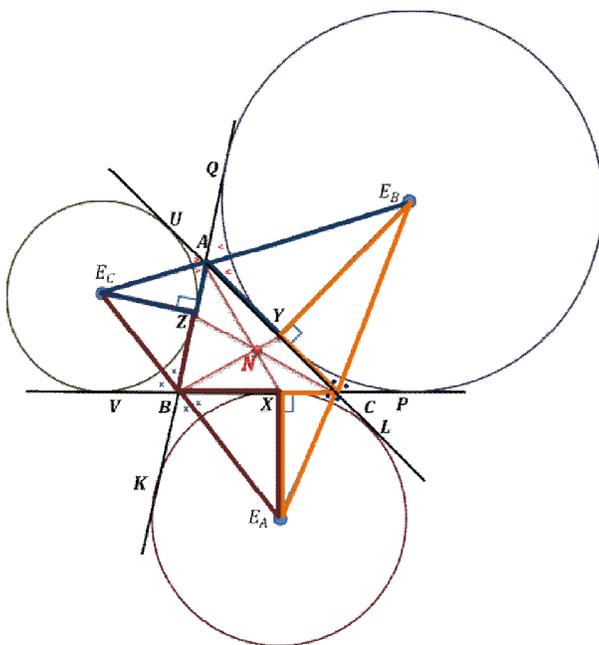
$$\frac{BX}{XC} = \frac{s - c}{s - b} \quad (9)$$

Jika persamaan (3), (6), dan (9) dikalikan, maka

$$\frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} = \frac{s - a}{s - c} \cdot \frac{s - b}{s - a} \cdot \frac{s - c}{s - b} = 1,$$

karena perbandingan sisi-sisi pada segitiga bernilai 1, maka terbukti bahwa ketiga garis AX , BY , dan CZ konkuren yaitu di titik N .

Pembuktian mengenai konkurensi titik Nagel dapat juga dilakukan dengan menggunakan konsep kesebangunan pada dua buah segitiga [3]. Perhatikan $\triangle ABC$ yang memiliki *excircle* di setiap sisinya pada Gambar 2, $\triangle BXE_A \sim \triangle BZE_C$, $\triangle CYE_B \sim \triangle CXE_A$, dan $\triangle AZE_C \sim \triangle AYE_B$.



Gambar 2. Konkurensi titik Nagel berdasarkan kesebangunan segitiga.

Karena $\triangle BXE_A \sim \triangle BZE_C$, maka diperoleh perbandingan sisi

$$\frac{BX}{BZ} = \frac{XE_A}{ZE_C}, \quad (10)$$

$\triangle CYE_B \sim \triangle CXE_A$, diperoleh perbandingan sisi

$$\frac{CY}{CX} = \frac{YE_B}{XE_A} \quad (11)$$

dan $\triangle AZE_C \sim \triangle AYE_B$, dengan perbandingan sisi

$$\frac{AZ}{AY} = \frac{ZE_C}{YE_B} \quad (12)$$

Jika persamaan (10), (11), dan (12) dikalikan, maka

$$\frac{BX}{BZ} \frac{CY}{CX} \frac{AZ}{AY} = \frac{XE_A}{ZE_C} \frac{YE_B}{XE_A} \frac{ZE_C}{YE_B} = 1,$$

kemudian diperoleh

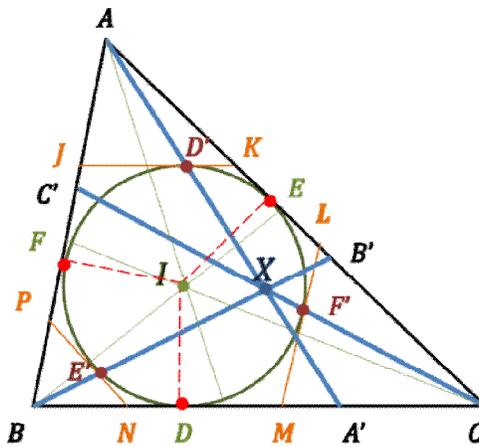
$$BX \cdot CY \cdot AZ = BZ \cdot CX \cdot AY,$$

sehingga

$$\frac{BX}{CX} \frac{CY}{AY} \frac{AZ}{ZB} = 1,$$

karena hasil perbandingan sisi-sisi pada segitiga bernilai 1, maka terbukti bahwa garis AX , BY , dan CZ konkuren yaitu di titik N . ■

Konkurensi pada titik ini disebut dengan titik Nagel dan pada umumnya dilambangkan dengan N . Alternatif mengkontruksi titik Nagel ini dilakukan dengan melalui *incircle* [4] yang ditunjukkan pada Gambar 3 berikut. Pada suatu *incircle* yang menyinggung semua sisi $\triangle ABC$ misalkan pada titik $D, E,$ dan F masing-masing pada sisi BC, CA dan AB , kemudian masing-masing sisi segitiga dibuat garis sejajar yaitu sisi $BC // JK$ yang mana JK menyinggung lingkaran dalam di titik D' , sisi $CA // NP$ yang mana NP menyinggung lingkaran dalam di titik E' dan sisi $AB // LM$ yang mana LM menyinggung lingkaran dalam di titik F' . Jika titik dari $\angle A$ pada $\triangle ABC$ dihubungkan terhadap titik D' , titik $\angle B$ dihubungkan terhadap E' , dan titik $\angle C$ dihubungkan terhadap F' maka perpanjangan dari ketiga garis $AD', BE',$ dan CF' akan konkuren, misalkan di titik X dan konkurensi ini juga dapat dikatakan sebagai titik Nagel [4].



Gambar 3. Konkurensi titik yang terbentuk melalui *incircle*.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa perpanjangan dari garis $AD', BE',$ dan CF' konkuren pada titik Nagel [4]. Perhatikan $\triangle ABA'$ dan $\triangle AJD'$, karena $\triangle ABA' \sim \triangle AJD'$, maka perbandingan sisinya, diperoleh

$$\frac{BA'}{JD'} = \frac{AA'}{AD'} \quad (13)$$

kemudian $\triangle AA'C \sim \triangle AD'K$ dengan perbandingan sisi

$$\frac{A'C}{D'K} = \frac{AA'}{AD'} \quad (14)$$

dari persamaan (13) dan (14), diperoleh

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{JD'}{D'K} \quad (15)$$

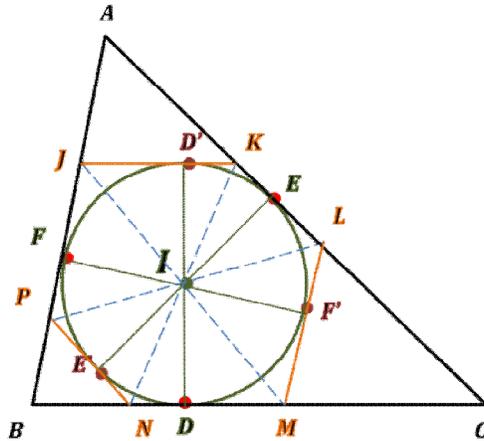
Dengan menggunakan cara yang sama, pada $\triangle BCB'$ dan $\triangle BB'A$ diperoleh $\triangle BCB' \sim \triangle BNE'$ dan $\triangle BB'A \sim \triangle BE'P$ sehingga diperoleh perbandingan sisi

$$\frac{CB'}{BA'} = \frac{NE'}{E'P} \quad (16)$$

pada $\triangle CAC'$ dan $\triangle CC'B$, diperoleh $\triangle CAC' \sim \triangle CLF'$ dan $\triangle CC'B \sim \triangle CF'M$, sehingga diperoleh perbandingan

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{LF'}{F'M} \quad (17)$$

Selanjutnya perhatikan Gambar 4, I merupakan *incenter* dan juga titik tengah dari diameter DD' , EE' , dan FF' .



Gambar 4. Titik I merupakan titik tengah dari diameter DD' , EE' , dan FF' .

Apabila ditarik garis dari titik I terhadap titik K dan N , diperoleh

$$\triangle KDI \cong \triangle KEI \quad (18)$$

dan

$$\triangle NE'I \cong \triangle NDI \quad (19)$$

Karena garis KN merupakan bisektor $\angle D'IE$ dan $\angle DIE'$, diperoleh

$$\triangle KDI \cong \triangle NDI \quad (20)$$

dan

$$\triangle KEI \cong \triangle NE'I \quad (21)$$

Dari persamaan (18), (19), (20), dan (21), diperoleh

$$\triangle NE'I \cong \triangle NDI \cong \triangle KDI \cong \triangle KEI,$$

sehingga

$$NE' = DN = D'K = EK. \quad (22)$$

Dengan menggunakan cara yang sama yaitu jika ditarik garis dari titik I terhadap titik P dan L , maka berlaku

$$LF' = EL = E'P = FP \quad (23)$$

dan dari titik I terhadap titik J dan M berlaku

$$JD' = FJ = F'M = DM \quad (24)$$

Dari perkalian persamaan (15), (16) dan (17), diperoleh

$$\frac{BA' CB' AC'}{A' C' B' A' C' B'} = \frac{JD' NE' LF'}{D' KE' P' FM'}$$

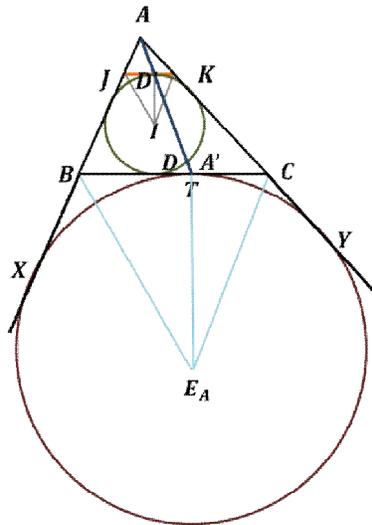
dan berdasarkan persamaan (22), (23) dan (24) diperoleh

$$\frac{BA' CB' AC'}{A' C' B' A' C' B'} = \frac{DMEK FP}{EK FP DM} = 1,$$

karena hasil perbandingan sisi-sisi pada segitiga bernilai 1, maka terbukti bahwa ketiga perpanjangan garis AD' , BE' , dan CF' konkuren.

Jika konkurensi yang diperoleh tersebut dimisalkan dengan titik X , maka titik X ini belum dapat dikatakan sebagai titik Nagel, karena menurut konsepnya, titik Nagel terbentuk melalui titik singgung dari *excircle*. Untuk itu, akan ditunjukkan bahwa titik X merupakan sebuah titik Nagel.

Perhatikan $\triangle ABC$ pada Gambar 5 berikut ini, jika pada sisi BC dikonstruksi *excircle* dengan pusat E_A , dengan titik singgung T , sedangkan A' merupakan titik potong dari perpanjangan garis AD terhadap sisi BC . Maka akan ditunjukkan bahwa $T=A'$ sehingga A' merupakan titik singgung lingkaran luar (*excircle*).



Gambar 5. Segitiga yang memuat *incircle* dan *excircle* pada sisi BC .

Pada Gambar 5, diperoleh $\triangle BE_A C \sim \triangle JIK$, sehingga tinggi TE_A dan $D'I$ bersesuaian dan diperoleh perbandingan sisi

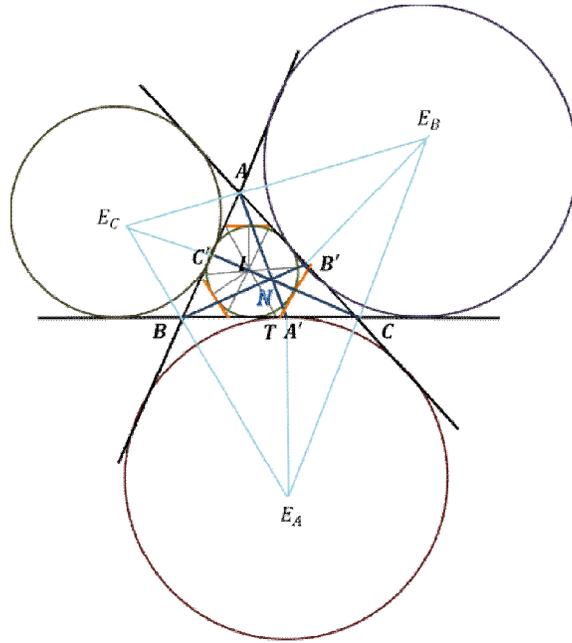
$$\frac{BT}{TC} = \frac{JD'}{D'K'}, \tag{25}$$

dari persamaan (15) dan (25), diperoleh

$$\frac{BT}{TC} = \frac{BA'}{A'C}$$

$$TC = A'C.$$

Karena $TC=A'C$, maka $T=A'$, sehingga dapat dikatakan bahwa A' merupakan titik singgung *excircle*. Dengan menggunakan cara yang sama yaitu dengan mengkontruksi *excircle* pada sisi segitiga yang lain, maka titik B' dan C' juga merupakan titik singgung *excircle* untuk sisi AC dan AB yang terdapat pada Gambar 6.

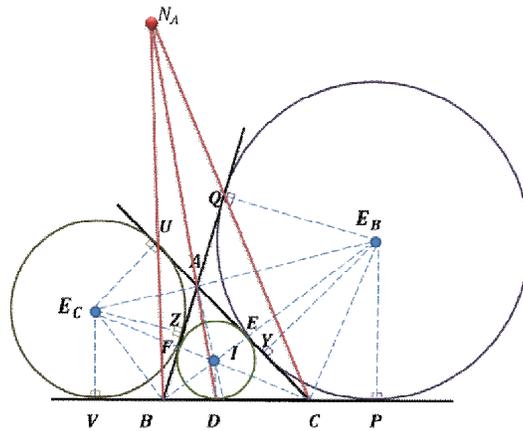


Gambar 6. Titik Nagel yang terbentuk melalui *incircle*.

Karena titik A' , B' , dan C' masing-masing merupakan titik singgung lingkaran singgung luar (*excircle*), maka terbukti bahwa konkurensi dari perpanjangan garis AD' , BE' , dan CF' pada Gambar 3 merupakan titik Nagel.

3. SEMI TITIK NAGEL

Pada segitiga di Gambar 7, $\triangle ABC$ yang memuat *incircle* I menyinggung sisi BC di titik D , *excircle* E_B menyinggung perpanjangan sisi BA di titik Q , dan *excircle* E_C menyinggung perpanjangan sisi CA di titik U . Jika sudut B pada segitiga dihubungkan titik U , sudut C dihubungkan terhadap titik Q , dan sudut A terhadap titik D , maka perpanjangan dari garis BU , DA , dan CQ konkuren [2]. Titik konkurensi ini disebut dengan semi titik Nagel atau titik Nagel yang berada di luar segitiga.



Gambar 7. Semi titik Nagel pada ΔABC .

Akan ditunjukkan bahwa perpanjangan dari garis BM , DA , dan CG konkuren. Dengan menggunakan semiperimeter, diperoleh

$$BD=s-b, DC=s-c, CU=s, UA=s-b, \\ AQ=s-c \text{ dan } QB=s$$

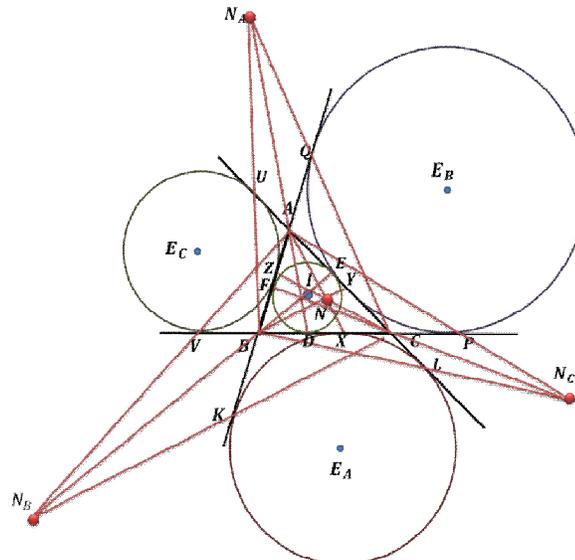
Menurut Guetierrez dengan menggunakan Teorema 1, diperoleh

$$\frac{BD}{DC} \frac{CU}{UA} \frac{AQ}{QB} = \frac{s-b}{s-c} \frac{s}{s-b} \frac{s-c}{s} = 1,$$

karena Teorema 1 terpenuhi, maka terbukti bahwa ketiga perpanjangan dari garis BU , DA , dan CQ konkuren pada titik N_A di luar segitiga.

Selanjutnya berdasarkan Teorema 3, akan ditunjukkan bahwa terdapat titik Nagel lainnya pada sebarang segitiga [6].

Teorema 3. Sebarang ΔABC memiliki empat titik Nagel.



Gambar 8. Empat titik Nagel pada ΔABC .

Bukti: Secara geometri dapat dilihat pada Gambar 8 dan terbukti bahwa pada sebarang segitiga memiliki empat buah titik Nagel, satu berada di dalam segitiga sedangkan tiga titik Nagel yang lainnya berada di luar segitiga. ■

4. KESIMPULAN

Mengkonstruksi suatu titik Nagel tidak hanya dapat dilakukan dengan melalui *excircle* melainkan dapat juga dilakukan dengan *incircle*. Meskipun dengan menggunakan dua cara berbeda, konstruksi titik yang dihasilkan adalah titik Nagel yang sama. Titik Nagel tersebut terbentuk di dalam segitiga. Selanjutnya, juga diperoleh kesimpulan bahwa pada segitiga dapat dibentuk suatu semi titik Nagel, yaitu titik Nagel yang terbentuk di luar segitiga.

5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Down Jr., F. L. 1964. *Geometry*. Addison-Wesley Publishing Company, INC. Boston.
- [2] Guetierrez, A. 2011. Problem 684: Outer Nagel Point, Triangle, Excircles, Tangency points, Concurrent lines, Semi-perimeter, Ceva theorem. Level: High School, SAT, College Geometry. 1 hal. http://gogeometry.com/geometry/p684_triangle_nagel_point_excircle_incircle_tangency_point_concurrent.htm, diakses pada 12 November 2013.
- [3] Harvey, M. 2011. 21 Concurrence III. 17hal. <http://www.mcs.uvawise.edu/msh3e/resources/geometryBook/21ConcurrenceIII.pdf>, diakses pada 24 Mei 2013.
- [4] Hoehn, L. 2007. A New Characterization of the Nagel Point. *Missouri J. Math. Sci*, **11**(1): 45-48.
- [5] Mashadi. 2012. *Geometri*. Pusbangdik Universitas Riau. Pekanbaru.
- [6] Odehnal, B. 2010. Generalized Gergonne Point and Nagel Point. *Beitr. Algebra Geom*, **51**(2): 477-491.