

**PENAKSIR RASIO UNTUK RATA-RATA POPULASI
PADA SAMPLING ACAK SEDERHANA
MENGUNAKAN KOEFISIEN VARIASI DAN MEDIAN**

Riski Rahmadani^{1*}, Arisman Adnan², Haposan Sirait²

¹Mahasiswa Program S1 Matematika

²Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru, 28293, Indonesia

*riskirahmadani_91@yahoo.co.id

ABSTRACT

This paper discusses three ratio estimators for the population mean in simple random sampling using coefficient of variation and median of an auxiliary variable, which is a review from the article of Subramani and Kumarapandiyam. All estimators are biased, then their mean square errors (MSE) are determined. Furthermore, the mean square errors are compared to show which estimator is the most efficient estimator. This paper reveals that the estimator using coefficient of variation and the median has the smallest mean square error (MSE).

Keywords: *ratio estimator, simple random sampling, coefficient of variation, median and mean square error*

ABSTRAK

Pada artikel ini dibahas tiga penaksir rasio untuk rata-rata populasi pada sampling acak sederhana menggunakan koefisien variasi dan median, yang merupakan *review* dari artikel Subramani dan Kumarapandiyam. Ketiga penaksir merupakan penaksir bias, sehingga ditentukan *mean square error (MSE)*. Selanjutnya, dibandingkan *mean square error* dari masing-masing penaksir untuk mendapatkan penaksir yang efisien. Tulisan ini mengungkapkan bahwa penaksir rasio dengan menggunakan koefisien variasi dan median memiliki *mean square error* terkecil (*MSE*).

Kata kunci: *penaksir rasio, sampling acak sederhana, koefisien variasi, median dan mean square error*

1. PENDAHULUAN

Penaksir rasio merupakan suatu metode yang digunakan untuk meningkatkan ketelitian suatu penaksir. Variabel y_i adalah variabel yang akan ditaksir dan variabel x_i telah

diteliti sebelumnya, dengan mengambil manfaat hubungan antara y_i dan x_i dimana y_i adalah unit dari populasi berkarakter Y dan x_i adalah unit dari populasi berkarakter X . Sehingga variabel x_i dapat digunakan sebagai variabel bantu untuk menaksir variabel y_i [1].

Bentuk umum penaksir rasio untuk rata-rata populasi \bar{Y} dari variabel yang diteliti Y dirumuskan dengan

$$\hat{Y}_R = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \bar{X} = \hat{R}\bar{X}$$

dengan \bar{y} adalah rata-rata sampel dari populasi Y , \bar{x} adalah rata-rata sampel dari populasi X dan \bar{X} adalah rata-rata populasi X .

Penaksir rasio untuk rata-rata populasi telah banyak dikembangkan oleh para peneliti. Sisodia dan Dwivedi [6] memodifikasi penaksir rasio menggunakan koefisien variasi. Kadilar dan Cingi [2] memodifikasi penaksir regresi menggunakan koefisien variasi. Dalam artikel ini dibahas tiga modifikasi penaksir rasio untuk rata-rata populasi pada sampling acak sederhana dengan menggunakan koefisien variasi dan median yang diajukan oleh Subramani dan Kumarapandiyam [7], yaitu

$$\hat{Y}_{p1} = \bar{y} \left(\frac{\bar{X}C_x + Md}{\bar{x}C_x + Md} \right) \quad (1)$$

$$\hat{Y}_{p2} = \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{C_x + Md} (C_x + Md) \quad (2)$$

$$\hat{Y}_{p3} = \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{Md + C_x} (Md + C_x) \quad (3)$$

dengan C_x adalah koefisien variasi dan Md adalah median.

Ketiga modifikasi penaksir rasio untuk rata-rata populasi tersebut merupakan penaksir bias, kemudian ditentukan MSE . Berdasarkan ide dari Subramani dan Kumarapandiyam [7], penulis membandingkan MSE dari masing-masing penaksir untuk memperoleh penaksir rasio yang efisien. Penaksir yang memiliki nilai MSE terkecil merupakan penaksir yang efisien.

2. SAMPLING ACAK SEDERHANA

Sampling acak sederhana adalah sebuah metode yang digunakan untuk mengambil n unit sampel dari N unit populasi sehingga setiap unit populasi memiliki kesempatan yang sama untuk dipilih menjadi unit sampel. Dalam hal ini pengambilan sampel dilakukan tanpa pengembalian agar hasil yang diperoleh menjadi representatif [1].

Pada pengambilan sampel tanpa pengembalian probabilitas terpilihnya n dari N populasi terpilih menjadi unit sampel pada pengambilan pertama adalah n/N , probabilitas pada pengambilan kedua adalah $\frac{n-1}{N-1}$, sampai probabilitas pada

pengambilan ke- n yaitu $1/\binom{N-n+1}{n}$, sehingga peluang seluruh n unit-unit tertentu yang terpilih dalam n pengambilan adalah $\binom{N-n}{n}$.

Teorema 2.1 [1 : h. 27] Apabila sampel berukuran n diambil dari populasi berukuran N yang berkarakter Y , dengan sampling acak sederhana tanpa pengembalian maka variansi rata-rata sampel \bar{y} dinotasikan dengan $V(\bar{y})$ yaitu

$$V(\bar{y}) = \frac{S_y^2}{n} \frac{N-n}{N} = \frac{(1-f)}{n} S_y^2$$

dengan $f = n/N$ adalah fraksi penarikan sampel dan $S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2}{N-1}$ adalah variansi y_i pada populasi berkarakter Y .

Bukti dari teorema ini dapat dilihat pada [1].

Teorema 2.2 [1 : h. 29] Jika y_i, x_i adalah sebuah pasangan pengamatan yang bervariasi dalam unit dalam populasi dan y, x adalah rata-rata dari sampel acak sederhana berukuran n , maka kovariansi adalah

$$\text{Cov}(\bar{y}, \bar{x}) = \frac{1-f}{n} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{X}) = \frac{1-f}{n} \rho S_y S_x.$$

Bukti dari teorema ini dapat dilihat pada [1].

Untuk menentukan MSE dari penaksir dalam bentuk dua variabel digunakan suatu pendekatan dengan menggunakan deret Taylor dua variabel.

Deret Taylor untuk dua variabel [5: h.47] Misalkan $f(x, y)$ adalah suatu fungsi dua variabel dan $f, f', f'', \dots, f^{(k)}$ adalah kontinu pada D dan $f^{(k+1)}$ ada pada D untuk $(x_0, y_0) \in D$. Jika $(x, y) \in D$, maka

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \left[(x-x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right] f(x_0, y_0) + \dots \\ &+ \frac{1}{n!} \left[(x-x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(x_0, y_0) \\ &+ \frac{1}{(k+1)!} \left[(x-x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{k+1} \\ &f(x_0 + \theta(x-x_0), y_0 + \theta(y-y_0)) \end{aligned} \quad (4)$$

dengan $0 < \theta < 1$.

Dengan memisalkan $x_0 = \bar{X}$, $x = \bar{X}$, $y_0 = \bar{Y}$, $y = \bar{Y}$, dan mengabaikan pangkat-pangkat yang lebih besar dari satu, maka dari persamaan (4) diperoleh nilai pendekatan untuk menentukan *MSE* yaitu

$$f(\bar{x}, \bar{y}) - f(\bar{X}, \bar{Y}) \approx \left(\left(\bar{x} - \bar{X} \right) \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} \Big|_{\substack{\bar{x}=\bar{X} \\ \bar{y}=\bar{Y}}} + \left(\bar{y} - \bar{Y} \right) \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \Big|_{\substack{\bar{x}=\bar{X} \\ \bar{y}=\bar{Y}}} \right) \quad (5)$$

3. PENAKSIR REGRESI UNTUK RATA-RATA POPULASI

Bentuk umum model regresi linear sederhana adalah

$$\bar{Y} = \alpha + \beta X + e, \quad (6)$$

dengan Y adalah variabel tak bebas, X adalah variabel bebas, α dan β adalah parameter (koefisien regresi), e adalah kesalahan pengamatan [4].

Metode yang digunakan untuk mendapatkan parameter α dan β adalah metode kuadrat terkecil. Misalkan x_i, y_i adalah n pasangan data pengamatan $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, dengan demikian persamaan (6) dapat ditulis

$$y_i = \alpha + \beta x_i + e_i, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Diasumsikan $E(e_i) = 0$ sehingga $E(y_i) = \alpha + \beta x_i$. Dari persamaan (7) maka jumlah kuadrat kesalahan pengamatan data terhadap garis regresi ditulis

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i)^2. \quad (8)$$

Dengan meminimumkan persamaan (8), maka penaksir untuk β yaitu

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

$$b = \frac{s_{xy}}{s_x^2}.$$

dan penaksir untuk α yaitu

$$a = \bar{y} - b\bar{x}. \quad (9)$$

Apabila variabel x dan y mempunyai hubungan kausal atau sebab akibat, maka secara geometris persamaan regresi melalui titik pangkal, maka persamaan (9) menjadi

$$\bar{y} = b\bar{x}, \quad (10)$$

$\hat{\beta}$ yang diperoleh dari sampel digunakan juga untuk populasi sehingga rata-rata populasi dinotasikan dengan \hat{Y}

$$\hat{Y} = b\bar{X}. \quad (11)$$

Dari pengurangan persamaan (11) dengan persamaan (10) secara aljabar, diperoleh

$$\hat{Y} = \bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x}).$$

\hat{Y} disebut penaksir regresi linier untuk rata-rata populasi yang dinotasikan dengan \hat{Y}_{LR} sehingga

$$\hat{Y}_{LR} = \bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x}).$$

4. BIAS DAN MSE PENAKSIR RASIO UNTUK RATA-RATA POPULASI

Bias dan *MSE* penaksir rasio yang diajukan oleh Subramani dan Kumarapandiyan [7] untuk rata-rata populasi pada sampling acak sederhana dari masing-masing penaksir sebagai berikut.

Bias dan *MSE* dari persamaan (1) diperoleh

$$B(\hat{f}_{p1}) \approx \frac{1-f}{n} \bar{Y} (C_{p1}^2 C_x^2 - \theta_{p1} \rho C_y C_x)$$

$$MSE(\hat{f}_{p1}) \approx \frac{1-f}{n} \bar{Y}^2 (C_y^2 + \theta_{p1}^2 C_x^2 - 2\theta_{p1} \rho C_x C_y)$$

dengan ρ adalah koefisien korelasi dan

$$\frac{\bar{X}C_x}{\bar{X}C_x + Md} = \theta_{p1}.$$

Bias dan *MSE* dari persamaan (2) diperoleh

$$B(\hat{f}_{p2}) \approx \frac{1-f}{n} \frac{S_x^2}{\bar{Y}} R_{p2}^2$$

$$MSE(\hat{f}_{p2}) \approx \frac{1-f}{n} (C_{p2}^2 S_x^2 + S_y^2 (-\rho^2))$$

dengan

$$\frac{\bar{Y}C_x}{\bar{X}C_x + Md} = R_{p2}.$$

Bias dan *MSE* dari persamaan (3) diperoleh

$$B(\hat{f}_{p3}) \approx \frac{1-f}{n} \frac{S_x^2}{\bar{Y}} R_{p3}^2$$

$$MSE(\hat{f}_{p3}) \approx \frac{1-f}{n} (C_{p3}^2 S_x^2 + S_y^2 (-\rho^2))$$

dengan

$$\frac{\bar{Y}Md}{\bar{X}Md + C_x} = R_{p3}.$$

5. PENAKSIR RASIO YANG EFISIEN

Untuk menentukan penaksir yang efisien dari penaksir yang bias, dapat ditentukan dengan cara membandingkan MSE dari masing-masing penaksir tersebut.

1. Perbandingan antara penaksir \hat{Y}_{p1} lebih efisien dari penaksir \hat{Y}_{p2} diperoleh $MSE(\hat{Y}_{p1}) < MSE(\hat{Y}_{p2})$ jika

$$0 < \beta < 2R_{p2}$$

2. Perbandingan antara penaksir \hat{Y}_{p1} lebih efisien dari penaksir \hat{Y}_{p3} diperoleh $MSE(\hat{Y}_{p1}) < MSE(\hat{Y}_{p3})$ jika

$$0 < \beta < 2R_{p3}$$

3. Perbandingan antara penaksir \hat{Y}_{p2} lebih efisien dari penaksir \hat{Y}_{p3} diperoleh $MSE(\hat{Y}_{p2}) < MSE(\hat{Y}_{p3})$ jika

$$C_x < Md$$

6. CONTOH

Contoh berikut merupakan pendapatan petani karet per hektar per tahun dan biaya pupuk dari Lestari [3]. Data tersebut diteliti di Air Tiris, Kecamatan Kampar, Kabupaten Kampar, Provinsi Riau pada tahun 2008. Data pendapatan dan biaya pupuk diberikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Data pendapatan petani dan biaya pupuk untuk tanaman karet

No	Pendapatan Rp	Biaya Pupuk Rp	No	Pendapatan Rp	Biaya Pupuk Rp
1	16.096.000	756.500	17	13.056.000	990.000
2	16.524.000	804.000	18	20.800.800	846.000
3	14.280.000	681.500	19	10.036.800	820.000
4	16.320.000	755.500	20	11.832.000	859.000
5	16.728.000	890.000	21	18.768.000	867.000
6	16.524.000	816.500	22	23.052.000	873.000
7	13.185.600	896.000	23	15.912.000	879.500
8	15.504.000	872.000	24	18.971.000	853.000
9	19.152.000	794.000	25	16.932.000	845.000
10	12.240.000	705.500	26	21.828.000	758.500
11	17.952.000	859.000	27	17.748.000	741.000
12	17.952.000	907.000	28	14.076.000	592.500
13	14.592.000	842.500	29	13.056.000	752.000
14	15.096.000	510.500	30	22.032.000	677.500
15	14.892.000	526.000	31	12.052.800	708.000
16	16.728.000	793.000	32	22.908.000	829.000

No	Pendapatan Rp	Biaya Pupuk Rp	No	Pendapatan Rp	Biaya Pupuk Rp
33	19.788.000	805.000	37	12.864.000	771.500
34	12.288.000	747.500	38	15.504.000	801.000
35	16.524.000	955.000	39	18.564.000	786.500
36	15.096.000	832.500	40	20.808.000	722.500

Dengan menggunakan data pada Tabel 1 akan ditentukan penaksir rasio yang efisien untuk menaksir rata-rata pendapatan petani karet per hektar per tahun dengan $n = 10$ menggunakan syarat penaksir lebih efisien yang diperoleh sebelumnya. Hal ini secara umum dapat ditunjukkan dengan menghitung MSE dari masing-masing penaksir. Sebagai informasi tambahan untuk menaksir rata-rata pendapatan petani karet per hektar per tahun digunakan biaya pupuk. Untuk menghitung MSE dari masing-masing penaksir terlebih dahulu ditentukan nilai yang dibutuhkan. Informasi yang diperoleh dari pendapatan dan biaya pupuk dengan menggunakan Microsoft Excel, yaitu

Tabel 2. Parameter dan Konstanta dari Populasi

N	40	β	3,15963
\bar{Y}	16.431.600	θ_{p1}	0,112085
\bar{X}	793.950	R_{p2}	2,31972
S_y	3.249,2	R_{p3}	20,69601
S_x	101,5	C_x	0,12791
ρ	0,09875	Md	804.500
f	0,25	-	-

Dengan menggunakan informasi sebelumnya, diperoleh bahwa

- (i) $MSE(\hat{Y}_{p1}) < MSE(\hat{Y}_{p2})$, jika $0 < 3,15963 < 4,63944$.
- (ii) $MSE(\hat{Y}_{p1}) < MSE(\hat{Y}_{p3})$, jika $0 < 3,15963 < 41,39202$.
- (iii) $MSE(\hat{Y}_{p2}) < MSE(\hat{Y}_{p3})$, jika $0,12791 < 804.500$.

Selanjutnya nilai MSE dari masing-masing penaksir disajikan pada Tabel 3, dapat dilihat bahwa MSE untuk penaksir \hat{Y}_{p1} merupakan MSE yang minimum, sehingga dapat dikatakan bahwa penaksir \hat{Y}_{p1} paling efisien dari penaksir \hat{Y}_{p2} dan penaksir \hat{Y}_{p3} .

Tabel 3. Nilai MSE dari masing-masing penaksir

No	Penaksir Rasio	MSE
1	\hat{Y}_{p1}	7,84629
2	\hat{Y}_{p2}	7,88246
3	\hat{Y}_{p3}	11,15400

7. KESIMPULAN

Setelah diperoleh nilai MSE dari masing-masing penaksir rasio untuk rata-rata populasi yang diajukan pada sampling acak sederhana. Kemudian membandingkan MSE dari masing-masing penaksir, sehingga dapat disimpulkan bahwa penaksir rasio \hat{Y}_{p1} dengan menggunakan koefisien variasi dan median lebih efisien dibandingkan dengan penaksir \hat{Y}_{p2} dan penaksir \hat{Y}_{p3} jika syarat efisien terpenuhi.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Cochran, W. G. 1991. *Teknik Penarikan Sampel, Edisi Ketiga*. Terj. Dari *Sampling Techniques*, oleh Rudiansyah & E. R Osman. UI Press, Jakarta.
- [2] Kadilar, C. and H. Cingi, 2004. Ratio Estimator in Simple Random Sampling. *Applied Mathematics and Computation*, **151**: 893-902.
- [3] Lestari, D. 2008. Analisis Faktor-faktor yang Mempengaruhi Pendapatan Petani Karet di Kelurahan Air Tiris Kecamatan Kampar. Skripsi Jurusan Sosial Ekonomi Pertanian (Agrobisnis) Fakultas Pertanian Universitas Riau, Pekanbaru.
- [4] Myers, R. H. 1986. *Classical and Modern Regression with Applications*. Wadsworth, Inc, America.
- [5] Phillips, G. M. and P. J. Taylor. 1972. *Theory and Applications of Numerical Analysis. Second Edition*. Academic Press, New York.
- [6] Sisodia, B. V. S. and V. K. Dwivedi, 1981. A Modified Ratio Estimator Using Coefficient of Variation Variable. *Jour. Ind. Soc. Agr. Stat*, **33**: 13-18.
- [7] Subramani, J. and G. Kumarapandiyam, 2012. Estimation of Population Mean Using Coefficient of Variation and Median of an Auxiliary Variable, *International Journal of Probability and Statistics 2012*, **1**(4): 111-118.